



دفترچه سوال

# حسابان پایه دوازدهم

آرشیو آزمون‌های تشریحی نیمسال اول

دی ماه - ۱۴۰۱ تا ۱۴۰۳



باسمه تعالی

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۹/۳۰

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: حسابان

بارم	سؤال	ردیف
۲/۵	<p>درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) برای رسم نمودار تابع <math>y = f(-x + 1)</math> از روی نمودار تابع <math>f(x)</math>، ابتدا <math>f(x)</math> را یک واحد به سمت راست برده و سپس نسبت به محور <math>y</math>ها قرینه می‌کنیم.</p> <p>ب) چندجمله‌ای <math>f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) - 4x + 20</math> بر <math>x+1</math> بخش پذیر است.</p> <p>ج) دوره تناوب تابع <math>f(x) = 3 \cos(\frac{x}{3})</math> برابر <math>\frac{2\pi}{3}</math> است.</p> <p>د) نمی‌توان بازه‌ای یافت که تابع <math>y = \tan x</math> در آن نزولی باشد.</p> <p>ه) معادله <math>\sqrt{3} - 2 \sin x = 0</math> در فاصله <math>[0, \pi]</math> یک ریشه دارد.</p>	۱
۱	<p>شکل زیر، نمودار تابع <math>y = f(x)</math> است. به کمک آن نمودار تابع <math>y = f(3x - 2)</math> را رسم کنید.</p>	۲
۲	<p>نمودار تابع <math>f(x) = \begin{cases} 1-x^2 &amp; x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} &amp; x &lt; 0 \end{cases}</math> را رسم کرده، مشخص کنید در کدام بازه، تابع صعودی و در کدام بازه، تابع نزولی است؟</p>	۳
۱	<p>اگر <math>f(x)</math> تابعی اکیداً نزولی با دامنه <math>\mathbb{R}</math> باشد، دامنه تابع <math>y = \sqrt{f(2x-1) - f(x+1)}</math> را به دست آورید.</p>	۴
۲	<p>اگر <math>f(x) = x^5 - ax^2 + bx + 3</math> بر <math>x-1</math> بخش پذیر باشد و باقی مانده‌اش بر <math>x+1</math> برابر <math>-3</math> باشد، <math>a</math> و <math>b</math> را به دست آورید.</p>	۵
۱	<p>ضابطه تابعی (یا سینوسی یا کسینوسی) را بنویسید که در آن <math>T = \frac{\pi}{5}</math>، <math>\max = -5</math> و <math>\min = -11</math> باشد.</p>	۶
۱/۵	<p>جواب‌های معادله <math>\cos x(2 \cos x + 5) = 3</math> را به دست آورید.</p>	۷
۲	<p>الف) اگر <math>\tan 2\alpha = 2m - 1</math> و <math>\frac{\pi}{8} &lt; \alpha &lt; \frac{3\pi}{8}</math> باشد، محدوده <math>m</math> را به دست آورید. ب) اگر <math>\tan \alpha = \frac{1}{3}</math> باشد، <math>\tan 2\alpha</math> را به دست آورید.</p>	۸



باسمه تعالی

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۹/۳۰

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: حسابان

صفحه ۲ از ۲

بارم	سؤال	ردیف
۲	<p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow (-4)^-} \frac{[x] + 5}{x^2 - 16}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x + 1}{-x^2 - 3x}</math></p> <p>ج) <math>\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x}</math></p> <p>د) <math>\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-x^2 + x + 2}{x^3 + 2x^2 + x}</math></p>	۹
۲	<p>همهٔ مجانب‌های تابع <math>f(x) = \frac{ x  - 5}{ x + 3  - 4x}</math> را به دست آورید.</p>	۱۰
۱/۵	<p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 100x^2 - 1</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^4 + 5x^3 - 1}{x^2 - 7x}</math></p> <p>ج) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)(x+2)(x+3) - x^3}{x^2 - 4x}</math></p>	۱۱
۱	<p>مجانب‌های قائم و افقی تابع <math>f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 3x}</math> را تعیین کنید.</p>	۱۲
۰/۵	<p>نمودار تابع <math>f(x) = \frac{1}{x -  x }</math> را در مجاورت مجانب قائم آن رسم کنید.</p>	۱۳
۲۰	جمع بارم	

## پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

تاریخ آزمون: آذرماه ۱۴۰۱

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: حسابان

صفحه ۱ از ۲

ردیف	سؤال	بارم
۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. الف) برای رسم نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ ، باید نمودار تابع $y = f(2x)$ را رسم کرده و آن را یک واحد در جهت محور $x$ ها به سمت راست انتقال می‌دهیم. ب) تابع $f(x) = \tan x$ در دامنه خود، اکیداً صعودی است. ج) دوره تناوب تابع $f(x) = 2 \sin(\pi x - \frac{\pi}{4}) + 1$ برابر است با $T = 2$ . د) تابع $f(x) = \frac{x\sqrt{x-1}}{x^2+x}$ ، مجانب قائم ندارد.	۲
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = kf(kx)$ از ..... نمودار $y = f(x)$ در راستای محور $x$ ها و ..... آن در راستای محور $y$ ها به دست می‌آید. ب) اگر دامنه تابع $y = f(x)$ بازه $[1, 4]$ باشد، دامنه تابع $y = f(3-x)$ برابر است با ..... ج) دامنه تابع $y = \tan x$ عبارت است از $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dots\}$ .	۲
۳	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2 & x < 0 \\ x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x - 4 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کرده و به سؤالات پاسخ دهید. الف) در چه فاصله یا فاصله‌هایی تابع اکیداً صعودی است؟ ب) آیا $f(x)$ روی دامنه‌اش یکنوا است؟	۱/۵
۴	ابتدا نمودار $f(x) = \sqrt{-2x+1} + 3$ را رسم کنید و سپس با توجه به آن، نمودار $y = 2f(x-1) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را معلوم کنید.	۲
۵	اگر باقی‌مانده چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + x - 2$ بر $x + a$ برابر $-3$ باشد، باقی‌مانده آن بر $x - a$ کدام است؟	۱/۵
۶	فرض کنید $f(x) = 4 \sin(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}) + 3$ باشد. ماکزیمم و مینیمم این تابع و دوره تناوب تابع $y =  f(x) $ را به دست آورید.	۱
۷	جواب‌های معادله $\sin x (2 \sin x - 3) = -1$ را به دست آورید.	۲



باسمه تعالی

پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: آذرماه ۱۴۰۱

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۲ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: حسابان

بارم	سؤال	ردیف
۱/۵	<p>در شکل زیر، مقدار <math>\tan \alpha</math> را حساب کنید.</p>	۸
۳	<p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow (-5)^-} \frac{25 - [x^2]}{ x + 5 }</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{10 - 3x - x^2}{x^2 - 4x + 4}</math></p> <p>ج) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 4x^2 + x - 1)</math></p> <p>د) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{2x + 3}</math></p>	۹
۱	<p>نمودار تابع <math>f(x) = \frac{1}{x +  x }</math> را در مجاورت مجانب قائم آن رسم کنید.</p>	۱۰
۱/۵	<p>اگر رفتار تابع <math>y = -\frac{x+1}{x^2 + bx + c}</math> در اطراف نقطه <math>x = -2</math> به صورت زیر باشد، مقادیر <math>b</math> و <math>c</math> را به دست آورید.</p>	۱۱
۱	<p>محل برخورد مجانب افقی و قائم تابع <math>f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{1 - x^2}</math> را به دست آورید.</p>	۱۲
۲۰	جمع بارم	



مرکز پیش‌آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

### پیش‌آزمون تشریحی هماهنگ دی‌ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

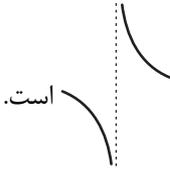
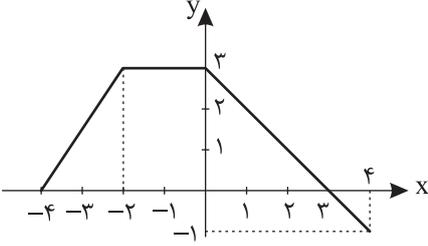
کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: حسابان (سری ۱)

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) اگر <math>f</math> و <math>g</math> در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، تابع <math>f - g</math> نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>(ب) در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی مقادیر <math>\sin \alpha</math> از مقادیر <math>\tan \alpha</math> کمتر است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>(ج) اگر دامنه تابع <math>y = f(x)</math> بازه <math>(a, b)</math> باشد، دامنه تابع <math>y = f(kx)</math> با شرط <math>k &lt; 0</math> برابر است با <math>(\frac{b}{k}, \frac{a}{k})</math>. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>(د) شکل تابع <math>f(x) = \frac{1}{x -  x }</math> اطراف مجانب قائمش به صورت  است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p>	۱
۲	<p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>(الف) نقطه <math>A(-2, 5)</math> بر روی تابع <math>y = f(x)</math> قرار دارد. تبدیل یافته نقطه <math>A</math> در تابع <math>g(x) = 2f(\frac{1}{3}x) - 3</math> نقطه ..... است.</p> <p>(ب) اگر <math>\frac{\pi}{4} &lt; \alpha_1 \leq \pi</math> و <math>\tan \alpha = 4 - 2m</math>، حدود <math>m</math> به صورت ..... است.</p> <p>(ج) دامنه تابع <math>f(x) = \tan(\frac{x}{3})</math> به صورت ..... است.</p> <p>(د) اگر <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^3 - 4x}{2x^3 - 9} = -3</math> آنگاه مقدار <math>m</math> برابر ..... است.</p>	۲
۱/۵	<p>نمودار تابع <math>f</math> در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع <math>y = -f(2x - 1)</math> را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.</p> 	۳
۱/۵	<p>دامنه و برد تابع <math>y = f(x)</math> به صورت <math>D_f = [-4, 3]</math> و <math>R_f = (2, 8]</math> است. دامنه و برد تابع <math>g(x) = 2f(x + 3) - 6</math> را بیابید.</p>	۴
۱/۵	<p>(الف) فرض کنید تابع <math>f</math> در یک بازه اکیداً نزولی باشد و <math>a</math> و <math>b</math> متعلق به این بازه باشند، اگر <math>f(a) \leq f(b)</math> نشان دهید که <math>a \geq b</math>.</p> <p>(ب) اگر <math>(\frac{1}{3})^{4x-2} \leq \frac{1}{343}</math> حدود <math>x</math> را به دست آورید.</p>	۵
۱/۵	<p>مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را طوری پیدا کنید که چند جمله‌ای <math>bx^4 - ax^3 + 3x + b</math> بر <math>x^2 - 1</math> بخش پذیر باشد.</p>	۶



مرکز تحقیقات آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

## پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

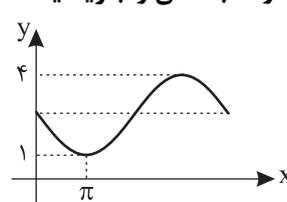
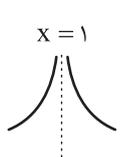
کلاس:

مدرسه:

صفحه ۲ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: حسابان (سری ۱)

بارم	سؤال	ردیف
۰/۷۵	دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = \sqrt{3} - 2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ را بنویسید.	۷
۱/۵	در شکل زیر نمودار تابع $f(x) = a \sin bx + c$ رسم شده است. مقادیر $a$ و $b$ و $c$ را محاسبه کنید و ضابطه آن را بنویسید. 	۸
۱/۵	جوابهای کلی معادله مثلثاتی $1 = \cos 3x + 2 \sin^2 x$ را به دست آورید.	۹
۱	اگر $\cot \alpha = -\frac{1}{4}$ و $\tan(\beta - \alpha) = 3$ ، آنگاه مقدار $\tan \beta$ را بیابید.	۱۰
۱/۷۵	حدهای زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{[x-2]}{\cos x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x^3 + x - 1}{3x^3 + x^2 + 1} - \frac{3}{x} \right)$ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + x^2 + \sqrt{x})$	۱۱
۱	نمودار تابع $f$ را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد: الف) $f(1) = f(-2) = 0$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ ج) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.	۱۲
۲	همه مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{ x-3  + 5x - 1}{ 2x-3  - 7}$ را پیدا کنید.	۱۳
۱/۵	نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + ax + b}$ در همسایگی مجانب قائم خود به صورت زیر است. مقادیر $a$ و $b$ را به دست آورید. 	۱۴
۲۰	جمع بارم	



مرکز پژوهش‌های آموزشی و روش‌های نوین

باسمه تعالی

## پیش‌آزمون تشریحی هماهنگ دی‌ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: حسابان (سری ۲)

بارم	سؤال	ردیف
۲	<p>درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر <math>A(x_0, y_0)</math> نقطه‌ای از نمودار تابع <math>f</math> باشد، <math>A'(2x_0 + 1, y_0)</math> نقطه متناظر آن روی نمودار تابع <math>g(x) = f(2x + 1)</math> است.  <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>ب) تابع <math>f(x) = x^2(1 - x^2)^3</math>، یک تابع چندجمله‌ای درجه ۸ است.  <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>ج) دوره تناوب تابع <math>y = \tan x</math> برابر با <math>2\pi</math> است.  <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>د) اگر صورت و مخرج کسری چندجمله‌ای باشند و درجه صورت از مخرج بیشتر باشد، حد کسر در بی‌نهایت برابر با صفر می‌شود.  <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p>	۱
۲	<p>جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر یک تابع در بازه‌ای هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع ..... است.</p> <p>ب) باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای <math>x^3 + x - 2</math> بر <math>2x + 1</math> برابر با ..... است.</p> <p>ج) دوره تناوب تابع <math>y = 8 \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)</math> برابر با ..... است.</p> <p>د) محدوده تغییرات تابع تانژانت در ربع چهارم، بازه ..... می‌باشد.</p>	۲
۱/۵	<p>اگر نمودار <math>y = f(x) + 1</math> به صورت</p> <p>باشد، ابتدا به کمک قوانین انتقال تابع <math>y = f(x)</math> را رسم کرده و سپس از روی آن نمودار <math>y = -f(2x - 3)</math> را رسم کنید.</p>	۳
۱/۵	<p>نمودار تابع <math>f(x) = \begin{cases}  x-1 +2 &amp; x \geq 0 \\ -2x^3 &amp; x &lt; 0 \end{cases}</math> را رسم کنید و مشخص کنید در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟</p>	۴
۲	<p>الف) اگر باقیمانده چند جمله‌ای <math>mx^3 + 2mx - 6</math> بر <math>x - 1</math> برابر ۶ باشد، باقیمانده آن بر <math>x + 2</math> را پیدا کنید.</p> <p>ب) کسر <math>\frac{x^6 - 64}{x + 2}</math> را ساده کنید. (<math>x \neq -2</math>)</p>	۵
۲	<p>الف) اگر بیشترین مقدار تابع <math>y = -\frac{7}{5} + \frac{2}{5} \sin 2x</math> را با <math>K</math> و کمترین مقدار تابع <math>y = \frac{7}{3} \cos 5x - \frac{2}{3}</math> را با <math>L</math> نشان دهیم، <math>K - L</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) تابع <math>y = \tan 2x</math> روی بازه <math>(a, b)</math> اکیداً صعودی است. بیشترین مقدار <math>b - a</math> چقدر است؟</p>	۶



مرکز پژوهش آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

# پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: حسابان (سری ۲)

صفحه ۲ از ۲

بارم	سؤال	ردیف
۱/۵	<p>شکل زیر قسمتی از نمودار تابع <math>f(x) = a \cos bx + c</math> می باشد. مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> و <math>c</math> را به دست آورید.</p>	۷
۱	<p>معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.</p> $\cos 2x = \cos x - 1$	۸
۲	<p>حاصل حدهای زیر را به دست آورید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 3}{2 - x}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x +  x - 1 }{5x + 6}</math></p>	۹
۲	<p>مجاذهای افقی و قائم نمودار تابع <math>f(x) = \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2}</math> را بیابید.</p>	۱۰
۱/۵	<p>برای تابع <math>f</math> که نمودار آن به صورت زیر داده شده است، موارد زیر را به دست آورید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =</math></p> <p>ج) <math>\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) =</math></p> <p>د) <math>\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) =</math></p> <p>ه) <math>\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =</math></p> <p>و) <math>\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =</math></p>	۱۱
۱	<p>اگر خط <math>y = 3</math> مجانب افقی تابع <math>f(x) = \frac{ax^2 - 9b}{(x - a)^2}</math> باشد و نمودار تابع اطراف مجانب قائم خود به صورت</p> <p>باشد، حدود <math>b</math> را به دست آورید.</p>	۱۲
۲۰	جمع باری	

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

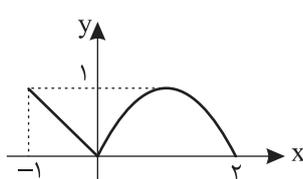
پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: حسابان



مرکز نخبش آموزش مدارس برتر

صفحه ۱ از ۲

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) تابع <math>f(x) = \sqrt{2-x}</math> در دامنه‌اش اکیداً یکنوا است.</p> <p>(ب) برد تابع <math>y = \tan x</math> برابر با مجموعه اعداد حقیقی است.</p> <p>(ج) دوره تناوب تابع <math>f(x) = \pi \cos(\frac{\pi x}{2}) - 4</math> برابر <math>\frac{\pi}{2}</math> است.</p> <p>(د) خط <math>y = 2</math> مجانب افقی تابع <math>f(x) = \frac{6x^2 - x}{3x + 4}</math> است.</p>	۱
۲	<p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>(الف) اگر نقطه <math>A(x_0, y_0)</math> روی نمودار تابع <math>y = f(x)</math> باشد، نقطه <math>B(\frac{x_0}{k}, y_0)</math> متناظر با <math>A</math> روی تابع <math>y = \dots</math> است.</p> <p>(ب) بازه تغییرات تابع <math>y = \tan x</math> در ناحیه دوم دایره مثلثاتی برابر است با <math>\dots</math>.</p> <p>(ج) اگر <math>\tan \alpha = 2</math> و <math>\tan \beta = -3</math>، مقدار <math>\tan(\alpha + \beta)</math> برابر است با <math>\dots</math>.</p> <p>(د) تابع <math>f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}</math> دارای <math>\dots</math> مجانب قائم است.</p>	۲
۱/۵	<p>اگر نمودار تابع <math>f</math> به صورت زیر باشد، نمودار تابع <math>y = 2f(\frac{x}{2} - 1)</math> را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.</p> 	۳
۱/۲۵	<p>نمودار تابع <math>y = x^3 + 3x^2 + 3x - 1</math> را به کمک انتقال نمودار تابع <math>y = x^3</math> رسم کنید و اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی بودن آن را معین کنید.</p>	۴
۱/۵	<p>نمودار تابع <math>f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x &amp; x &lt; 0 \\ x + 1 &amp; x \geq 0 \end{cases}</math> را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟</p>	۵
۲	<p>(الف) مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای <math>x^3 + ax^2 + bx + 1</math> بر <math>x - 2</math> و <math>x + 1</math> بخش پذیر باشد.</p> <p>(ب) <math>x^6 - 1</math> را با عامل <math>x + 1</math> تجزیه کنید.</p>	۶
۱/۲۵	<p>دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع <math>y = -\pi \cos(\frac{x}{3}) - 3\pi</math> را بیابید.</p>	۷

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

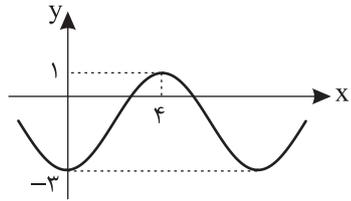
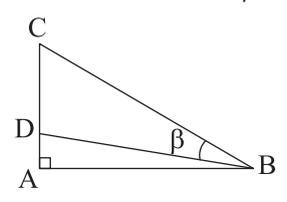
پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: حسابان



مرکز نخبش آموزش مدارس برتر

صفحه ۲ از ۲

بارم	سؤال	ردیف
۱	ضابطه تابع مثلثاتی که نمودار آن به صورت زیر است را بیابید. 	۸
۱/۲۵	معادله $\cos 2x + 3 \sin x = 2$ را حل کنید.	۹
۱	در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ (شکل زیر) داریم: $AD = ۰/۵$ ، $CD = ۲/۵$ و $AB = x$ ثابت کنید: $\tan \beta = \frac{۲/۵x}{x^2 + ۱/۵}$ 	۱۰
۰/۵	نمودار تابعی را رسم کنید که در آن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ باشد.	۱۱
۲	حاصل حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2} =$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4} =$ ج) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 3x^3 - 1}{1 - 2x + 6x^3} =$ د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x^4) =$	۱۲
۱	اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2ax + [x]}{1 - x^2} = -\infty$ باشد، حدود a را پیدا کنید.	۱۳
۱/۵	مجاانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2}$ را تعیین کنید.	۱۴
۱/۲۵	نمودار تابع $f(x) = \frac{x-2}{x- x }$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟	۱۵
۲۰	جمع بارم	



مرکز تخصصی آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۳

صفحه ۱ از ۲

باسمه تعالی

### پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه

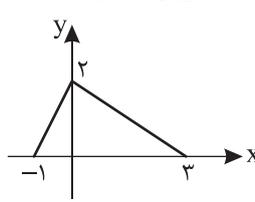
پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

کلاس:

نام درس: حسابان (سری ۲)

مدرسه:

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درستی و نادرستی جملات زیر را تعیین کنید.</p> <p>(الف) برای رسم نمودار تابع <math>y = f(2x - 1)</math> از روی نمودار <math>f(x)</math>، ابتدا نمودار تابع <math>y = f(2x)</math> را رسم کرده، سپس آن را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.</p> <p>(ب) نمودار تابع <math>y = x^3 + 3x^2 + 3x</math> از ناحیه اول و سوم دستگاه مختصات می‌گذرد.</p> <p>(ج) تابع <math>y = \tan x</math> با دامنه <math>\left\{ \frac{\pi}{3} \right\} - (\pi, 0)</math>، اکیداً صعودی است.</p> <p>(د) تابع <math>f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-1}</math> فقط یک مجانب دارد.</p>	۱
۱	<p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>(الف) اگر دامنه تابع <math>y = f(x)</math> بازه <math>[a, b]</math> باشد، دامنه تابع <math>y = f(kx)</math> برای <math>k &lt; 0</math> عبارت است از .....</p> <p>(ب) اگر طول و عرض نقاط تابع <math>y = f(x)</math> را قرینه کنیم، نقاط تابع ..... به دست می‌آید.</p> <p>(ج) در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی، مقادیر <math>\tan \alpha</math> از <math>\sin \alpha</math> ..... است.</p> <p>(د) حاصل <math>\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\pi})^+} \left[ \frac{x+1}{\tan \pi x} \right]</math> برابر است با ..... ( [ ] نماد جزء صحیح است).</p>	۲
۱/۵	<p>نمودار تابع <math>y = f(x+2)</math> به صورت زیر است. نمودار <math>y = f(2x-1) + 3</math> را رسم کرده و دامنه و برد آن را معلوم کنید.</p> 	۳
۱/۵	<p>نمودار تابع <math>f(x) = \begin{cases} x^2 &amp; x \geq -1 \\ 2x + 3 &amp; x &lt; -1 \end{cases}</math> را رسم کنید و مشخص کنید تابع در کدام فاصله‌ها اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است؟</p>	۴
۱	<p>دامنه تابع <math>f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}}</math> را تعیین کنید.</p>	۵
۲	<p>(الف) اگر چند جمله‌ای <math>p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5</math> بر <math>2x^2 - 3x + 1</math> بخش پذیر باشد، مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را پیدا کنید.</p> <p>(ب) عبارت <math>x^5 + 32</math> را با عامل <math>x + 2</math> تجزیه کنید.</p>	۶
۱	<p>اگر دوره تناوب تابع <math>y = -2 - \cos \frac{2\pi}{3}x</math> باشد، نمودار تابع را در بازه <math>[0, T]</math> رسم کنید.</p>	۷



مرکز تخصصی آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۳

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

### پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه

کلاس:

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: حسابان (سری ۲)

بارم	سؤال	ردیف
۱/۵	<p>نمودار تابع <math>y = a + 2b \sin \frac{b}{\pi} x</math> شکل زیر است. با فرض <math>b &gt; 0</math> مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را معلوم کنید.</p>	۸
۱	اگر $\tan \alpha = 2$ مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} - 2\alpha)$ چه عددی است؟	۹
۲	<p>هر یک از معادلات زیر را حل کنید.</p> <p>الف) <math>\cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos x = 0</math></p> <p>ب) <math>\tan(\frac{\pi}{3} - x) \tan 2x = 1</math></p>	۱۰
۲	<p>حاصل حدهای زیر را به دست آورید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{[x] + 1}{x - 1}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2x+1}{x^2-3x} - \frac{2x^2+3}{x^2+3x})</math></p> <p>ج) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{2x + \sqrt{x^2+2x}}</math></p> <p>د) <math>\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ x  + \sin^2 x}{x^2}</math></p>	۱۱
۱	حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x^n + 2x - 1}$ را به ازای مقادیر مختلف عدد طبیعی $n$ به دست آورید.	۱۲
۱	اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^2 + bx - 3x) = 4$ مقدار $a - b$ را بیابید.	۱۳
۱	<p>نمودار تابع <math>f</math> را چنان رسم کنید که تمام شرایط زیر را همزمان داشته باشد.</p> <p>(۱) <math>y = 1</math> و <math>y = -2</math> مجانب افقی آن باشد.</p> <p>(۲) <math>x = -2</math> مجانب قائم آن باشد.</p> <p>(۳) <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty</math></p>	۱۴
۱/۵	خطوط مجانب تابع $y = \frac{2x + \sqrt{x-1}}{ x+1  - 3}$ را مشخص کنید.	۱۵
۲۰	جمع بارم	



مرکز تخصصی آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۰/۹

صفحه ۱ از ۲

باسمه تعالی

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: حسابان

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف) نقطه <math>A(2, 3)</math> واقع بر <math>y = f(x)</math> با نقطه <math>A'(4, 3)</math> واقع بر <math>y = f(2x)</math> متناظر است.</p> <p>ب) چندجمله‌ای <math>x + 1</math> یک عامل <math>x^6 - 1</math> است.</p> <p>ج) حاصل <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 2x^2 - 1)</math> برابر <math>-\infty</math> است.</p> <p>د) تابع <math>y = \frac{x^2 + x}{x^2}</math> مجانب قائم ندارد.</p>	۱
۱	<p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف) مجموعه جواب نامعادله <math>\log(x+1) \leq \log(2x-3)</math> به صورت بازه ..... است.</p> <p>ب) اگر چندجمله‌ای <math>x^2 + ax - 8</math> بر <math>x - a</math> بخش پذیر باشد، آنگاه <math>a</math> برابر ..... است.</p> <p>ج) حاصل <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}</math> برابر ..... است.</p> <p>د) خط ..... مجانب افقی تابع <math>y = \frac{x+1}{x^2-1}</math> است.</p>	۲
۱/۵	<p>نمودار تابع <math>g(x) = f(x-1)</math> به صورت زیر است. نمودار تابع <math>y = -f(2x)</math> را رسم کرده، دامنه و برد آن را به دست آورید و سپس تعیین کنید که در کدام بازه هم صعودی است و هم نزولی؟</p>	۳
۱	<p>تابع <math>y = f(x)</math> مفروض است. اگر طول نقاط تابع <math>f</math> را در <math>2</math> ضرب کنیم و نمودار حاصل را <math>3</math> واحد در جهت افقی به سمت راست انتقال دهیم و در نهایت عرض نقاط به دست آمده را <math>4</math> برابر کنیم و سپس نمودار حاصل را <math>2</math> واحد به سمت بالا انتقال دهیم. ضابطه تابع به دست آمده را به دست آورید.</p>	۴
۲	<p>الف) به کمک نمودار <math>y = x^3</math> و وارون آن، نمودار توابع <math>y = (x-1)^3</math> و <math>y = -\sqrt[3]{x-1}</math> را رسم کنید.</p> <p>ب) نمودار تابع <math>f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 &amp; x \leq 1 \\ -\sqrt[3]{x-1} &amp; x &gt; 1 \end{cases}</math> را رسم کنید و تعیین کنید که در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟</p>	۵
۱/۵	<p>اگر چندجمله‌ای <math>f(x) = x^3 - 4x^2 + ax + 4</math> بر <math>x - 2</math> بخش پذیر باشد، باقیمانده تقسیم <math>f(2x - 3)</math> را بر <math>x - a</math> به دست آورید.</p>	۶
۱/۵	<p>الف) مقدار <math>a</math> را به گونه‌ای تعیین کنید که در تابع <math>f(x) = 2 - a \sin(\frac{\pi}{a} x)</math> مقدار ماکزیمم از مقدار مینیمم آن، <math>6</math> واحد بیشتر باشد.</p> <p>ب) دوره تناوب تابع <math>f</math> را به دست آورید.</p>	۷



مرکز نخبش آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۰/۹

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

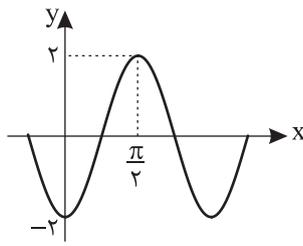
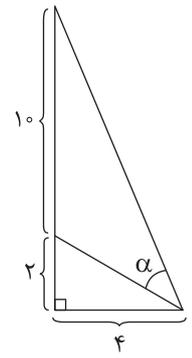
مدت آزمون: ۱۱۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: حسابان

بارم	سؤال	ردیف
۲	<p>قسمتی از نمودار تابع <math>f(x) = a \cos bx + c</math> به صورت زیر است. مقادیر <math>a</math>، <math>b</math> و <math>c</math> را به دست آورده و سپس ضابطه <math>f(x)</math> را بنویسید.</p> 	۸
۱/۵	معادله مثلثاتی $\sin x(2 \sin x - 9) = 5$ را حل کنید و جواب‌های آن را در بازه $(0, 2\pi)$ به دست آورید.	۹
۱	<p>در شکل زیر، مقدار <math>\tan \alpha</math> را محاسبه کنید.</p> 	۱۰
۱/۵	<p>حاصل حدهای زیر را به دست آورید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{\sin x}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x^2 - 4}</math></p> <p>ج) <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^3 - 2x + 1}</math></p>	۱۱
۲	مقدار $a$ را به گونه‌ای بیابید که $x = -1$ تنها مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + 3}{(x+1)(x-3)}$ باشد. سپس نمودار تابع $f$ را در نزدیکی مجانب قائم آن رسم کنید.	۱۲
۰/۷۵	نقطه برخورد مجانب‌های تابع $y = \frac{3x-1}{x-2}$ را به دست آورید.	۱۳
۱/۲۵	مقادیر $b$ و $c$ را به گونه‌ای بیابید که $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2x^2 + bx + c} = +\infty$ باشد.	۱۴
۰/۵	حد چپ و حد راست تابع $y = \tan x$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید.	۱۵
۲۰	جمع بارم	



دفترچه پاسخنامه

# حسابان پایه دوازدهم

آرشیو آزمون‌های تشریحی نیمسال اول



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۵/۵ نمره)

(ج) نادرست

(ب) درست

(الف) نادرست

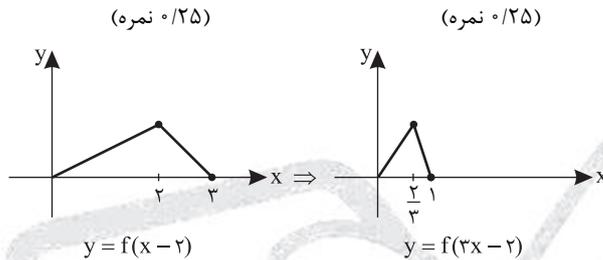
(ه) نادرست

(د) درست

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۱۲، ۲۲، ۲۷، ۳۴ و ۳۷)

پاسخ سؤال ۲: (۱ نمره)

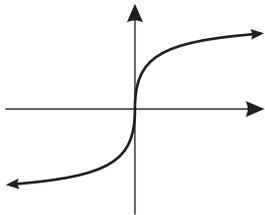
برای رسم نمودار تابع  $y = f(3x - 2)$ ، ابتدا نمودار  $y = f(x - 2)$  را با انتقال افقی به سمت راست نمودار  $f$  به اندازه ۲ واحد رسم می‌کنیم. (نمره ۵/۲۵) سپس با تبدیل  $x \rightarrow 3x$ ، دامنه تابع،  $\frac{1}{3}$  برابر می‌شود. (نمره ۵/۲۵)



(حسابان دوازدهم، تمرین ۲، صفحه ۱۲)

پاسخ سؤال ۳: (۲ نمره)

تذکر: تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، تابع وارون  $y = x^3$  می‌باشد، یعنی نمودار آن، قرینه نمودار  $y = x^3$  نسبت به خط  $y = x$  می‌باشد.

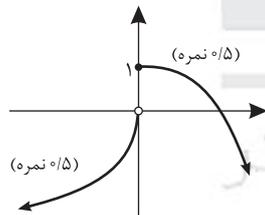


(حسابان دوازدهم، فعالیت ۳، صفحه ۱۴)

با توجه به مطلب بالا، نمودار  $f$  را رسم می‌کنیم. تابع  $f$  در بازه  $(-\infty, 0)$  اکیداً صعودی و در بازه  $[0, +\infty)$  اکیداً نزولی است.

(نمره ۵/۵)

(نمره ۵/۵)



(حسابان دوازدهم، مشابه تمرین ۲، صفحه ۱۸)

پاسخ سؤال ۴: (۱ نمره)

$$D_y : f(2x - 1) \geq f(x + 1) \Rightarrow 2x - 1 \leq x + 1 \Rightarrow x \leq 2 \xrightarrow{D_f = \mathbb{R}} x \leq 2 = (-\infty, 2]$$

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ و ۱۸)

پاسخ سؤال ۵: (۲ نمره)

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow -a + b + 3 = 0 \Rightarrow -a + b = -3 & \text{(نمره ۵/۲۵)} \\ f(-1) = -3 \Rightarrow -1 - a - b + 3 = -3 \Rightarrow -a - b = -5 & \text{(نمره ۵/۲۵)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a = -9 \Rightarrow a = \frac{9}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \text{(نمره ۱)}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۹)



پاسخ سؤال ۶: (۱ نمره)

$$f(x) = a \sin bx + c$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow |b| = 10 \Rightarrow b = \pm 10 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\begin{cases} \max = |a| + c = -5 \\ \min = -|a| + c = -11 \end{cases} \Rightarrow 2c = -16 \Rightarrow c = -8 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

یا جواب‌های دیگری که می‌توان نوشت:  $y = 3 \sin 10x - 8$  (نمره ۰/۲۵)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۴)

پاسخ سؤال ۷: (۱/۵ نمره)

$$2 \cos^2 x + 5 \cos x - 3 = 0 \Rightarrow (\cos x + 3)(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -3 \text{ جواب ندارد} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \quad (\text{نمره } 0/5) \end{cases}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۴۰)

پاسخ سؤال ۸: (۲ نمره)

الف)  $\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < 2\alpha < \frac{3\pi}{4}$

$\tan 2\alpha > 1 \Rightarrow 2m - 1 > 1 \Rightarrow m > 1$   
 $\tan 2\alpha < -1 \Rightarrow 2m - 1 < -1 \Rightarrow m < 0$

$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$  (نمره ۰/۵)

ب)  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\tan \alpha = \frac{1}{3}} \tan 2\alpha = \frac{2}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4}$  (نمره ۰/۵)

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۲۹ و ۴۴)

پاسخ سؤال ۹: (هر مورد ۰/۵ نمره)

الف)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-5 + 5}{x^2 - 16} = \frac{0}{0^+} = 0$  (مطلق ۰)

ب)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x + 1}{-x(x + 3)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

ج)  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2})^+} \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{-1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^- - (\frac{\sqrt{2}}{2})^+} = +\infty$

د)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(x+1)(x-2)}{x(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(x-2)}{x(x+1)} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۸)

پاسخ سؤال ۱۰: (۲ نمره)

مجانب‌های قائم:  $|x + 3| - 4x = 0 \Rightarrow |x + 3| = 4x \xrightarrow{x \geq 0} \begin{cases} x + 3 = 4x \Rightarrow x = 1 \quad (\text{نمره } 0/5) \\ x + 3 = -4x \Rightarrow x = -\frac{3}{5} < 0 \quad (\text{نمره } 0/5) \end{cases}$

پس فقط یک مجانب قائم  $x = 1$  داریم.

مجانب‌های افقی:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-5}{x+3-4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{-3x} = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$  (نمره ۰/۵)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-5}{-x-3-4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-5x} = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{5}$  (نمره ۰/۵)

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۵۸ و ۶۹)



## پاسخ سؤال ۱۱: (هر مورد ۵/۵ نمره)

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^7 = +\infty$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3x^2 = +\infty$

ج)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 6x^2 + 11x + 6 - x^7}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2}{x^2} = 6$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

## پاسخ سؤال ۱۲: (۱ نمره)

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x(x-4)}{x(x+3)} = \frac{x-4}{x+3} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

به این ترتیب خط  $x=0$  نمی‌تواند مجانب قائم تابع باشد.

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x-4}{x+3} = \frac{-7}{0^+} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x-4}{x+3} = \frac{-7}{0^-} = +\infty \Rightarrow x=-3 \text{ مجانب قائم} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-4}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow y=1 \text{ مجانب افقی} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

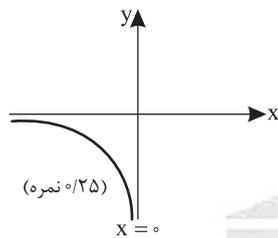
(حسابان دوازدهم، تمرین ۴، صفحه ۶۹)

## پاسخ سؤال ۱۳: (۵/۵ نمره)

ابتدا دامنه تابع را تعیین می‌کنیم:

$$x - |x| = 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x \geq 0$$

تابع  $f$  در اعداد نامنفی تعریف نمی‌شود:



$$D_f = (-\infty, 0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x-|x|} = \frac{1}{x+x} = \frac{1}{2x} \Rightarrow x=0 \text{ مجانب قائم} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-|x|} = \frac{1}{0^+} \text{ مطلق} \quad \text{تعریف نشده}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x-|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

(حسابان دوازدهم، تمرین ۶، صفحه ۵۸)



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۵/۵ نمره)

الف) نادرست، ابتدا نمودار  $y = f(x-1)$  را رسم کرده، سپس دامنه را نصف می‌کنیم.

ب) نادرست، این تابع روی دامنه‌اش غیریکنواست. (به دلیل تعریف تشده بودن تابع در  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ )

ج) درست

(حسابان دوازدهم، مثال صفحه ۱۰)

(حسابان دوازدهم، کار در کلاس صفحه ۳۳)

$$T = \frac{7\pi}{\pi} = 7$$

(حسابان دوازدهم، مشابه تمرین صفحه ۳۳)

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x-1}}{x(x+1)} \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

د) درست، ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$x = -1$  مجانب قائم نیست، چون عبارت زیر رادیکال صورت را منفی می‌کند، پس تابع  $f$  مجانب قائم ندارد.

(حسابان دوازدهم، مشابه مثال حل شده صفحه ۵۶)

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۵/۵ نمره)

الف) انقباض - انقباض

ب)  $[-1, 2]$

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۷ و ۹)

$$f(x) \xrightarrow{\text{سه واحد به چپ}} f(x+3) \xrightarrow{x \rightarrow -x} f(3-x)$$

$$[1, 4] \rightarrow [-2, 1] \rightarrow [-1, 2]$$

(حسابان دوازدهم، تمرین ۲، صفحه ۱۲)

ج)

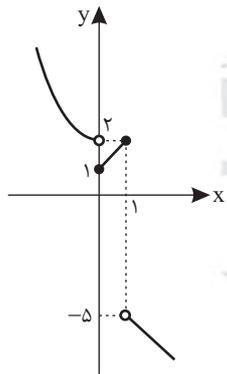
$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۲)

پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)

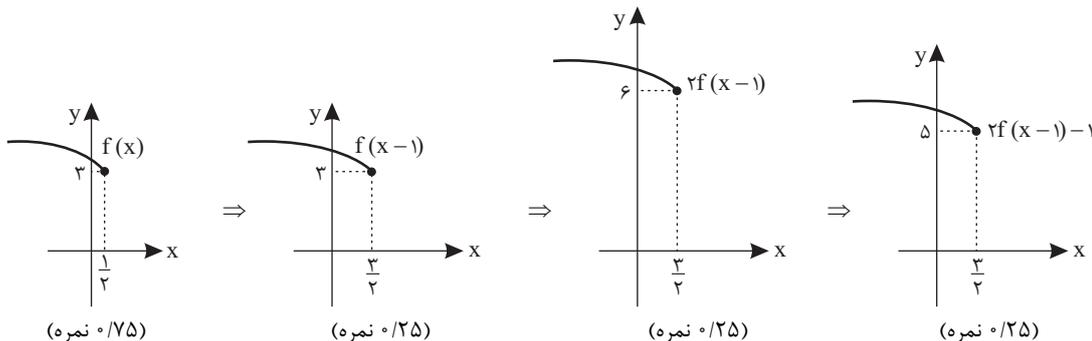
الف) روی  $[0, 1]$  اکیداً صعودی است.

ب) خیر، زیرا در فاصله‌هایی نزولی و در فاصله‌هایی دیگر صعودی است.



(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۸)

پاسخ سؤال ۴: (۲ نمره)



دامنه  $(-\infty, \frac{3}{2}]$  (نمره ۰/۲۵)

برد  $[5, +\infty)$  (نمره ۰/۲۵)

(نمره ۰/۷۵)

(نمره ۰/۲۵)

(نمره ۰/۲۵)

(نمره ۰/۲۵)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۴)



پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)

$$f(x) = x^r + ax^r + x - 2$$

$$-3 \Rightarrow f(-a) = (-a)^r + a(-a)^r - a - 2 = -3$$

$$\Rightarrow -a^r + a^r - a - 2 = -3 \Rightarrow a = 1$$

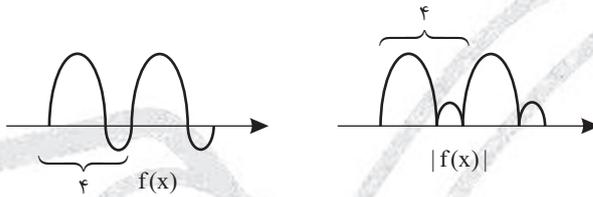
$$x - a \Rightarrow f(a) = a^r + a(a^r) + a - 2 = 2a^r + a - 2 \xrightarrow{a=1} f(1) = 1$$

(حسابان دوازدهم، مشابه کار در کلاس ۲، صفحه ۱۹)

پاسخ سؤال ۶: (۱ نمره)

$$T_{f(x)} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\begin{cases} y_{\max} = |4| + 3 = 7 \\ y_{\min} = -|4| + 3 = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{با توجه به اینکه } |y_{\min}| \neq |y_{\max}|} T_{|f(x)|} = T_{f(x)} = 4$$



(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۷)

پاسخ سؤال ۷: (۲ نمره)

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (نمره ۱)} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \text{ (نمره ۱)} \end{cases}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۵)

پاسخ سؤال ۸: (۱/۵ نمره)

$$\alpha = C\hat{B}A - D\hat{B}A \Rightarrow \tan \alpha = \tan(C\hat{B}A - D\hat{B}A) \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\tan C\hat{B}A - \tan D\hat{B}A}{1 + \tan C\hat{B}A \cdot \tan D\hat{B}A} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{2}{4}}{1 + \frac{3}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{19}{16}} = \frac{8}{19} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{8}{19} \text{ (نمره ۰/۷۵)}$$

(حسابان دوازدهم، برگرفته از مثال حل شده کتاب، صفحه ۴۳)

پاسخ سؤال ۹: (۳ نمره)

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-5)^-} \frac{25 - [x]^2}{|x+5|} = \frac{25 - 25}{|0^-|} = \frac{0}{0^+} = 0 \text{ (نمره ۰/۵)}$$

(حسابان دوازدهم، مشابه کار در کلاس، صفحه ۵۳)

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1 - 3x - x^2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+5)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+5)}{x-2} = \frac{-7}{0^-} = +\infty \text{ (نمره ۱)}$$

(حسابان دوازدهم، مشابه مثال حل شده، صفحه ۵۳)

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 4x^2 + x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -2(+\infty)^3 = -\infty \text{ (نمره ۰/۵)}$$

(حسابان دوازدهم، مشابه مثال حل شده، صفحه ۶۵)

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2} \text{ (نمره ۱)}$$

(حسابان دوازدهم، مشابه تمرین ۳، صفحه ۶۶)



## پاسخنامه پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

تاریخ آزمون: آذرماه ۱۴۰۱

پاسخنامه درس: حسابان

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

صفحه ۳ از ۳

## پاسخ سؤال ۱۰: (۱ نمره)

$$x + |x| = 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x \leq 0$$

$$D_f = x > 0: \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \rightarrow \quad \text{(نمره ۰/۵)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \begin{array}{c} y \\ \curvearrowright \\ x \\ x=0 \end{array} \quad \text{(نمره ۰/۵)}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۸)

## پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۵ نمره)

 $x = -2$  ریشه مضاعف مخرج است. (نمره ۰/۵)

(نمره ۰/۵)

$$x^2 + bx + c = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow b = 4, c = 4 \quad \text{(نمره ۰/۵)}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۱)

## پاسخ سؤال ۱۲: (۱ نمره)

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x-1)}{-(x-1)(x-1)} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (نمره ۰/۲۵) مجانب قائم} \\ y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{2x}{x} = -2 \text{ (نمره ۰/۲۵) مجانب افقی} \end{cases}$$

محل تلاقی: (۱, -۲) (نمره ۰/۲۵)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۷)



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) نادرست، اکیداً صعودی بدون  $f - g$  معلوم نیست.

ب) نادرست، مقدار  $\tan \alpha$  منفی تر است پس  $\tan \alpha < \sin \alpha$ .

ج) درست، دامنه باید  $\frac{1}{k}$  برابر شود و چون  $k < 0 \rightarrow (\frac{b}{k}, \frac{a}{k})$

د) نادرست،  $f(x) = \frac{1}{x-|x|} = \frac{1}{2x}, x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

این تابع در  $x > 0$  تعریف نمی شود. شکل f اطراف  $x = 0$ :

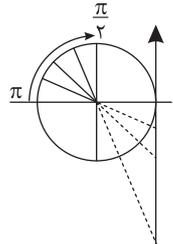
(حسابان دوازدهم، صفحه های ۱۰، ۲۲، ۳۴ و ۵۸)

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۵/۰ نمره)

الف)  $A'(-6, 7)$  (۵/۰ نمره)

$f(-2) = 5, g(x) = 2f(\frac{1}{2}x) - 3 \Rightarrow \frac{1}{2}x = -2 \Rightarrow x = -4$

$g(-6) = 2f(-2) - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7 \Rightarrow g(-6) = 7$



ب)  $m \geq 2$  (۵/۰ نمره)

طبق دایره مثلثاتی زیر، در  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$  مقدار  $\tan \alpha$  کوچک تر مساوی صفر است.

$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi \Rightarrow \tan \alpha \leq 0 \Rightarrow 4 - 2m \leq 0$

$\Rightarrow 2m \geq 4 \Rightarrow m \geq 2$

ج)  $D_f = \mathbb{R} - \{x | x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\}$  (۵/۰ نمره)

$f(x) = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq 2k\pi + \pi$

$D_f = \mathbb{R} - \{x | x = 2k\pi + \pi\}$

د)  $m = -6$  (۵/۰ نمره)

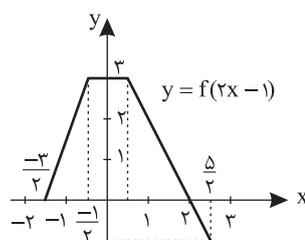
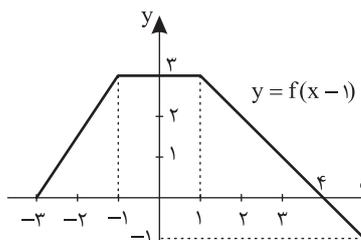
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^2 - 4x}{2x^2 - 9} = \frac{m}{2} = -3 \Rightarrow m = -6$

پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)

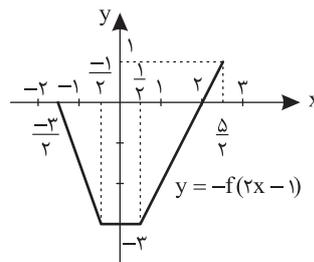
طبق تبدیل های زیر، نمودار  $y = -f(2x-1)$  از روی نمودار  $y = f(x)$  رسم می شود.

$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = f(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} y = f(2x-1)$

$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} y = -f(2x-1)$



رسم نمودار (۱ نمره)



دامنه  $[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$  (نمره ۲۵/۰)

برد  $[-3, 1]$  (نمره ۲۵/۰)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۲)

پاسخ سؤال ۴: (۱/۵ نمره)

دامنه تابع  $y = f(x)$  به صورت  $D_f = [-4, 2]$  است، یعنی  $-4 \leq x < 2$ ، پس در تابع  $g(x) = 2f(x+2) - 6$  باید  $x+2$  در بازه  $[-4, 2]$  قرار داشته باشد یعنی:

$-4 \leq x+2 < 2 \Rightarrow -7 \leq x < 0 \Rightarrow D_g = [-7, 0)$  (نمره ۲۵/۰)



برد تابع  $y = f(x)$  بازه  $R_f = (2, 8]$  است، یعنی  $2 < f(x) \leq 8$ ، پس در تابع  $g$  داریم:

$$2 < f(x+3) \leq 8 \quad (\text{نمره } 0/25) \quad \rightarrow x \rightarrow 4 < 2f(x+3) \leq 16 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\rightarrow -6 \rightarrow 4 - 6 < 2f(x+3) - 6 \leq 16 - 6 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow -2 < g(x) \leq 10 \Rightarrow R_g = (-2, 10] \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۰)

پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)

الف) فرض می‌کنیم  $a \geq b$  نباشد، یعنی  $a < b$  (نمره ۰/۲۵) و چون  $f$  اکیداً نزولی است، داریم:

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b) \quad (\text{نمره } 0/25)$$

نتیجه فوق، خلاف فرض است، زیرا  $f(a) \leq f(b)$  پس باید  $a \geq b$  باشد. (نمره ۰/۲۵)

ب) با توجه به اینکه تابع  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  اکیداً نزولی است، داریم:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-2} \leq \frac{1}{243} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow 4x-2 \geq 5 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow 4x \geq 7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{4} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۲)

پاسخ سؤال ۶: (۱/۵ نمره)

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow 2 - a + 3 + b = 0 \Rightarrow -a + b = -5 \\ f(-1) = 0 \Rightarrow 2 + a - 3 + b = 0 \Rightarrow a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow b = -2, a = 3$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۲)

پاسخ سؤال ۷: (۰/۷۵ نمره)

$$f(x) = a \sin bx + c \Rightarrow \begin{cases} \max = |a| + c \\ \min = -|a| + c \\ T = \frac{2\pi}{|b|} \quad (\text{نمره } 0/25) \end{cases}$$

$$f(x) = -2 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \max = 2 + \sqrt{3} \quad (\text{نمره } 0/25) \\ \min = -2 + \sqrt{3} \quad (\text{نمره } 0/25) \\ T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8 \end{cases}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۳)

پاسخ سؤال ۸: (۱/۵ نمره)

$$\begin{cases} \max = 4 \\ \min = 1 \\ T = \pi \Rightarrow T = 4\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = 1 \\ + 2c = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow |a| = \frac{3}{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

چون تابع بعد از  $x = 0$  نزولی است، نمودار شبیه  $-\sin x$  می‌باشد یعنی  $ab < 0$  اگر  $a = \frac{3}{2}$  آنگاه  $b = -\frac{1}{2}$  و اگر  $a = -\frac{3}{2}$  آنگاه  $b = \frac{1}{2}$ :

$$y = -\frac{3}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2} \quad \text{یا} \quad y = \frac{3}{2} \sin\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2} \quad (\text{نمره } 0/75)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۴)

پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

$$\cos 3x = 1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\cos 3x = \cos 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۴)



پاسخ سؤال ۱۰: (۱ نمره)

$$\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = -\sqrt{3} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\tan(\beta - \alpha) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \sqrt{3} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \beta + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \beta} = \sqrt{3} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \Rightarrow \tan \beta + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan \beta$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \tan \beta = 0 \Rightarrow \tan \beta = 0 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۴۲)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۷۵ نمره)

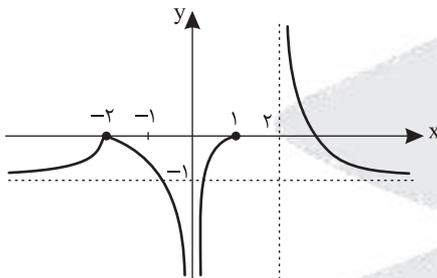
الف)  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{[x-2]}{\cos x} = \frac{[\frac{\pi}{2}-2]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$  (نمره ۰/۵)

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-2x^3 + x - 1}{3x^3 + x^2 + 1} - \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-2x^3}{3x^3} - 0 \right) = \frac{-2}{3}$  (نمره ۰/۷۵)

ج)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + x^2 + \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -\infty$  (نمره ۰/۵)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱ نمره)

نمودار تابع f می تواند به صورت زیر باشد:



توجه کنید که می توان بی شمار نمودار با شرایط گفته شده رسم کرد.

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

پاسخ سؤال ۱۳: (۲ نمره)

مجاانب های قائم ریشه های مخرج هستند:

$$|2x - 3| - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x - 3 = 7 \Rightarrow x = -5 \\ 2x - 3 = -7 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \Delta x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + \Delta x}{-2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۵ نمره)

از آنجا که هم در همسایگی چپ و هم در همسایگی راست مجانب قائم، تابع به  $+\infty$  رفته است، پس  $x = 1$  ریشه مضاعف مخرج است. (نمره ۰/۵) یعنی:

$$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{\text{ریشه مضاعف ۱ دارد}} \begin{cases} x = 1: 1 + a + b = 0 \\ \Delta_{\text{مخرج}} = 0 \Rightarrow a^2 - 4b = 0 \end{cases} \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\Rightarrow a = -2, b = 1 \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۸)



مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

# پاسخنامه پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۲

پاسخنامه درس: حسابان (سری ۲)

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

صفحه ۱ از ۲

## پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۵/۰ نمره)

الف) نادرست      ب) درست      ج) نادرست      د) نادرست

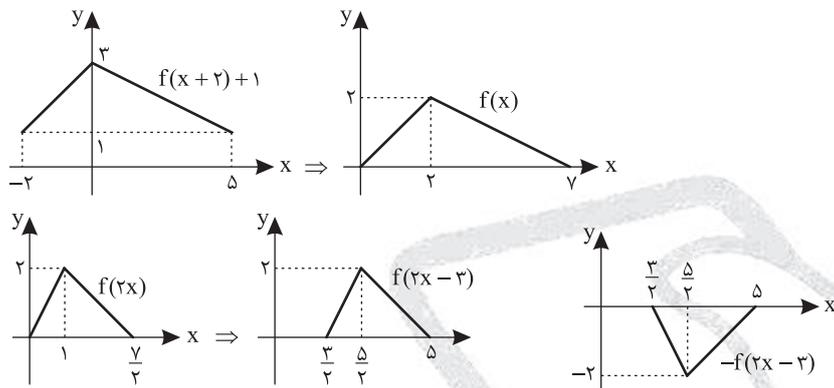
(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۱۰، ۱۳، ۳۲ و ۴۶)

## پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۵/۰ نمره)

الف) ثابت      ب)  $-\frac{21}{8}$       ج)  $6\pi$       د)  $(-\infty, 0)$

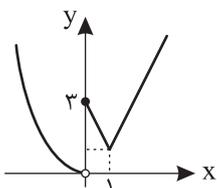
(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۱۶، ۱۹، ۲۷ و ۳۰)

## پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)



(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۲)

## پاسخ سؤال ۴: (۱/۵ نمره)



$(-\infty, 0)$ : نزولی (اکیداً نزولی)  
 $[0, 1]$ : نزولی (اکیداً نزولی)  
 $[1, +\infty)$ : صعودی (اکیداً صعودی)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۸)

## پاسخ سؤال ۵: (۲ نمره)

الف)  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow m + 2m - 6 = 6 \Rightarrow 3m = 12 \Rightarrow m = 4$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow 4(-2)^2 + 2(4)(-2) - 6 = -54$

ب)  $\frac{x^6 - 64}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32)}{x + 2} = x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۲)

## پاسخ سؤال ۶: (۲ نمره)

الف)

$y = \frac{-\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5} \sin 2x \Rightarrow \max = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{5} = -1 = K$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \Delta x - \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \min = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} = L$

$\Rightarrow K - L = 2$

ب) دوره تناوب تابع برابر  $T = \frac{\pi}{3}$  است. پس بیشترین مقدار  $b - a$  برابر  $\frac{\pi}{3}$  است.

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۴)

## پاسخ سؤال ۷: (۱/۵ نمره)

$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$  (نمره ۵/۰)

$\left. \begin{matrix} \max = 5 \Rightarrow |a| + c = 5 \\ \min = 1 \Rightarrow -|a| + c = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow c = 3, |a| = 2$  (نمره ۵/۰)

با توجه به کیفیت شکل متوجه می‌شویم که  $a = 2$  و  $b = \pm \frac{1}{2}$  می‌باشد. (نمره ۵/۰)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۸)



پاسخ سؤال ۸: (۱ نمره)

$$\cos 2x = \cos x - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = \cos x - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پاسخ سؤال ۹: (۲ نمره)

الف) در  $x \rightarrow 2^-$  حاصل  $[x]$  دقیقاً برابر ۱ است، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 3}{2 - x} = \frac{1 - 3}{2 - 2^-} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad (\text{نمره } 0/5)$$

ب) در  $x \rightarrow -\infty$  عبارت  $x - 1$  منفی است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + |x - 1|}{5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - (x - 1)}{5x + 6} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۵۳ و ۶۶)

پاسخ سؤال ۱۰: (۲ نمره)

حد تابع را در ریشه های مخرج بررسی می کنیم:

$$f(x) = \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2}, 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + 2x^2}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1 + 2}{(1 - 1^-) \times 2} = \frac{3}{0^+ \times 2} = \frac{3}{0^+} = +\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + 2x^2}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1 + 2}{(1 - 1^+) \times 2} = \frac{3}{0^- \times 2} = \frac{3}{0^-} = -\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 + 2x^2}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1 + 2}{2(1 + (-1)^+)} = \frac{3}{2 \times 0^+} = \frac{3}{0^+} = +\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1 + 2x^2}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1 + 2}{2(1 + (-1)^-)} = \frac{3}{2 \times 0^-} = \frac{3}{0^-} = -\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

خطوط  $x = 1$  و  $x = -1$  مجانب های قائم هستند. (نمره ۰/۲۵)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

خط  $y = -2$  مجانب افقی است. (نمره ۰/۲۵)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

پاسخ سؤال ۱۱: (هر مورد ۰/۲۵ نمره)

$+\infty$  (د)

$+\infty$  (ج)

-۱ (ب)

الف) ۱

۱ (و)

-∞ (ه)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱ نمره)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{ax^2}{x^2} = a = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 9b}{(x - 3)^2}, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty \Rightarrow \frac{27 - 9b}{0^+} = -\infty$$

$$\Rightarrow 27 - 9b < 0 \Rightarrow 9b > 27 \Rightarrow b > 3$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۸)



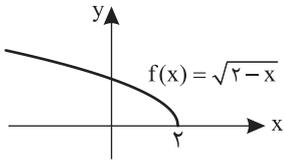
پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) درست (۲۵/۰ نمره)

تابع  $f(x) = \sqrt{2-x}$  در دامنه‌اش یعنی بازه  $(-\infty, 2]$  اکیداً نزولی است.

ب) درست (۲۵/۰ نمره)

ج) نادرست (۲۵/۰ نمره)



$$f(x) = \pi \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 4 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 - x}{3x + 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x = \pm\infty$$

د) نادرست (۲۵/۰ نمره)

تابع  $f$  مجانب افقی ندارد.

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۵/۰ نمره)

الف)  $y = f(kx)$

ب) در ناحیه دوم  $\tan x$  منفی است و بازه تغییرات آن  $(-\infty, 0)$  است.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 + (-3)}{1 - (-6)} = -\frac{1}{7}$$

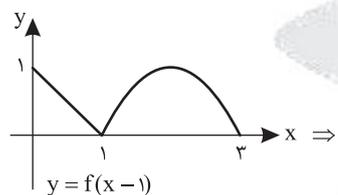
د)  $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)}$  پس این تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

به طور کلی: الف)  $f(kx)$ ، ب)  $(-\infty, 0)$ ، ج)  $-\frac{1}{7}$ ، د) یک

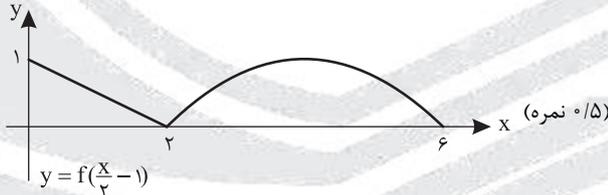
(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۹، ۴۲، ۳۰ و ۵۶)

پاسخ سؤال ۳: (۵/۱ نمره)

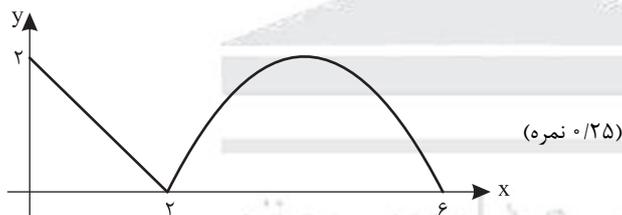
$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} f(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x}{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} 2f\left(\frac{x}{2}\right)$$



(۲۵/۰ نمره)



(۵/۱ نمره)



(۲۵/۰ نمره)

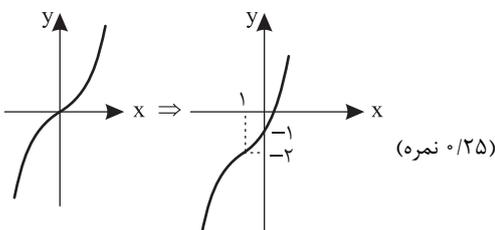
دامنه تابع نهایی بازه  $[0, 6]$  و برد آن بازه  $[0, 2]$  می‌باشد. (۵/۱ نمره)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۲)

پاسخ سؤال ۴: (۲۵/۱ نمره)

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2 \Rightarrow y = (x+1)^3 - 2$$

$$y = x^3 \xrightarrow{x \rightarrow x+1} y = (x+1)^3 \xrightarrow{-2} y = (x+1)^3 - 2$$



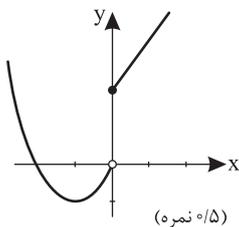
(۲۵/۰ نمره)

با توجه به نمودار، تابع رسم شده اکیداً صعودی است. (۲۵/۰ نمره)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۴)



پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)



اکیداً نزولی:  $(-\infty, -1)$  (۰/۵ نمره)  
 اکیداً صعودی:  $(-1, +\infty)$  (۰/۵ نمره)

(۰/۵ نمره)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۸)

پاسخ سؤال ۶: (۲ نمره)

الف) چون  $p(x) = x^2 + ax^2 + bx + 1$  بر  $x - 2$  و  $x + 1$  بخش پذیر است، داریم:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow p(2) = 0 \Rightarrow 8 + 4a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow p(-1) = 0 \Rightarrow -1 + a - b + 1 = 0 \Rightarrow a = b \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 4a + 2a = -9 \Rightarrow 6a = -9 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2} \quad (نمره ۰/۵)$$

(ب)

$$x^6 - 1 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) \quad (نمره ۰/۵)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۲)

پاسخ سؤال ۷: (۱/۲۵ نمره)

$$y = -\pi \cos\left(\frac{1}{3}x\right) - 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$\max = |-\pi| - 2\pi \quad (نمره ۰/۲۵) \Rightarrow \pi - 2\pi = -\pi$$

$$\min = -|-\pi| - 2\pi \quad (نمره ۰/۲۵) \Rightarrow -\pi - 2\pi = -3\pi$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۷)

پاسخ سؤال ۸: (۱ نمره)

ضابطه تابع به صورت  $y = a \cos(bx) + c$  است که در آن،  $a$  منفی است. نصف دوره تناوب برابر ۴ است؛ پس:

$$\frac{1}{2}T = 4 \Rightarrow T = 8 \Rightarrow \left|\frac{2\pi}{b}\right| = 8 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{4} \quad (نمره ۰/۲۵)$$

ماکزیمم تابع برابر ۱ و مینیمم آن برابر  $-3$  است.

$$\begin{cases} |a| + c = 1 \\ -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow |a| - 1 = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = -2 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$y = -2 \cos\left(\pm \frac{\pi}{4}x\right) - 1 \Rightarrow y = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 1 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۴)

پاسخ سؤال ۹: (۱/۲۵ نمره)

با استفاده از فرمول  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$  داریم:

$$\cos 2x + 3 \sin x = 2 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x = 2 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \quad (نمره ۰/۲۵) \Rightarrow (\sin x - 1)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 1, \sin x = \frac{1}{2}$$

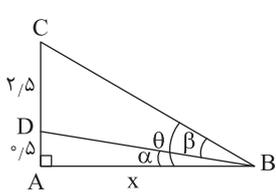
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & (نمره ۰/۲۵) \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} & (نمره ۰/۲۵) \end{cases}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۳۴)



پاسخ سؤال ۱۰: (۱ نمره)



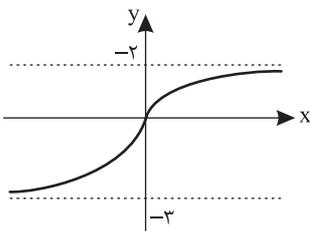
$\Delta ABD: \tan \alpha = \frac{3/x}{x}$  (نمره ۰/۲۵)

$\Delta ABC: \tan \theta = \frac{2.5/x}{x}$  (نمره ۰/۲۵)

$\tan \beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{2.5}{x} - \frac{3}{x}}{1 + \frac{2.5}{x} \cdot \frac{3}{x}} \Rightarrow \tan \beta = \frac{2.5x}{x^2 + 1.5}$  (نمره ۰/۲۵)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۴۳)

پاسخ سؤال ۱۱: (۵ نمره)



(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

پاسخ سؤال ۱۲: (هر مورد ۵ نمره)

الف)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] - 2}{x} = \frac{1 - 2}{-2} = \frac{-1}{-2} = +\infty$

ب)  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x(x+2)}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

ج)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{6x^2} = -\frac{1}{3}$

د)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2) = -2(+\infty) = -\infty$

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۵۳، ۵۵، ۶۶ و ۶۹)

پاسخ سؤال ۱۳: (۱ نمره)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2ax + [x]}{1 - x^2} = \frac{2a + 1}{0^-} = -\infty \Rightarrow 2a + 1 > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{2}$  (نمره ۰/۵)

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2ax + [x]}{1 - x^2} = \frac{2a + 0}{0^+} = -\infty \Rightarrow 2a < 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 0$  (نمره ۰/۲۵)

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۵۵ و ۵۸)

پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۵ نمره)

$f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$  (نمره ۰/۲۵)

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$  مجانب قائم  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$  (نمره ۰/۵)

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow y = 1$  مجانب افقی (نمره ۰/۵)

دقت کنید  $x = -1$  نمی‌تواند مجانب قائم باشد چون  $-\infty$  یا  $+\infty$  (نمره ۰/۲۵).

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

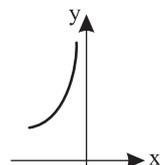
پاسخ سؤال ۱۵: (۱/۲۵ نمره)

$x - |x| = 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, +\infty) \Rightarrow D_f = (-\infty, 0)$  (نمره ۰/۵)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x-|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x-(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{2x} = \frac{0-2}{0^-} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$  (نمره ۰/۲۵)

تابع در همسایگی چپ  $x = 0$  تعریف شده و داریم:

نمودار تابع در مجاورت  $x = 0$  (مجاذب قائم) به صورت زیر است:



(نمره ۰/۲۵)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۸)



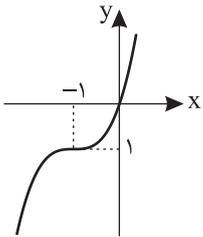
پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) نادرست، ابتدا  $f(x-1)$  رسم می‌شود. سپس با تبدیل  $x$  به  $2x$ ، دامنه را نصف می‌کنیم.

در روشی دیگر می‌توان نوشت  $(y = f(2(x - \frac{1}{2})))$  ابتدا  $y = f(2x)$  رسم می‌شود، سپس  $\frac{1}{2}$  واحد به سمت راست منتقل می‌شود.

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x+1)^3 - 1$$

ب) درست،



ج) نادرست، به دلیل پرش نمودار در مجانب‌های قائم

د) درست، خطوط  $x = \pm 1$  مجانب قائم نیستند. چون زیر رادیکال صورت را منفی می‌کنند و تنها  $y = 0$  مجانب افقی تابع است.

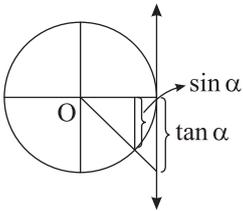
پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) دامنه باید عدد منفی  $k$  تقسیم شود:

$$a \leq x \leq b \xrightarrow{+k} \frac{a}{k} \geq x \geq \frac{b}{k} \Rightarrow D_{f(kx)} = [\frac{b}{k}, \frac{a}{k}]$$

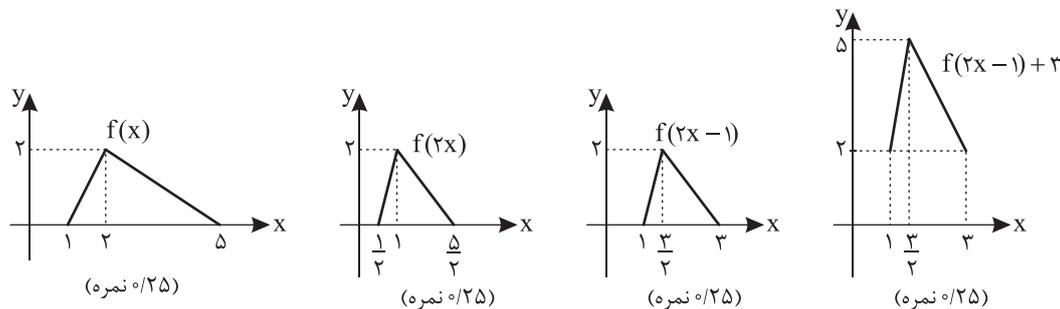
ب)  $y = -f(-x)$

ج) کوچکتر  $\tan \alpha < \sin \alpha$



$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{x}{\tan \pi x} = \frac{\frac{1}{2}}{[-\infty]} = [0^-] = -1 \leftarrow -1 \text{ (د)}$$

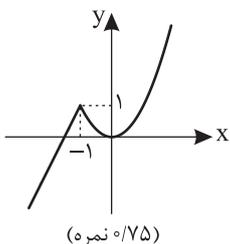
پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)



(۲۵/۰ نمره) دامنه  $[1, 3]$   
(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۲)

(۲۵/۰ نمره) برد  $[2, 5]$

پاسخ سؤال ۴: (۱/۵ نمره)



(۲۵/۰ نمره)  $(-\infty, -1]$  یا  $(-\infty, -1)$ : اکیداً صعودی

(۲۵/۰ نمره)  $[-1, 0]$  یا  $(-1, 0)$ : اکیداً نزولی

(۲۵/۰ نمره)  $(0, +\infty)$  یا  $[0, +\infty)$ : اکیداً صعودی

(۷۵/۰ نمره)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۱۸)



## پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{2x+2} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} \Rightarrow 2x+2 \leq x-1 \Rightarrow x \leq -3$$

توجه کنید تابع  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$  اکیداً نزولی است و با حذف پایه‌ها از طرفین جهت نامساوی عوض می‌شود.

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۲)

## پاسخ سؤال ۶: (۲ نمره)

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (نمره } \frac{5}{5} \text{ الف)}$$

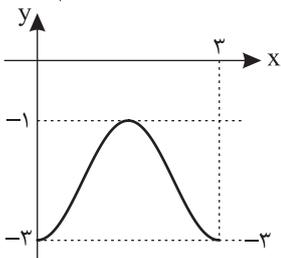
$$\begin{cases} p(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b + \delta = 0 \\ p\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \text{ (نمره } \frac{2.5}{5} \text{)} \\ b = -\frac{2}{3} \text{ (نمره } \frac{2.5}{5} \text{)} \end{cases}$$

$$\text{ب) } x^5 + 2^5 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16) \text{ (نمره } \frac{5}{5} \text{)}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۲)

## پاسخ سؤال ۷: (۱ نمره)

$$T = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}\pi} = 3 \Rightarrow \max = -1, \min = -3$$



(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۷)

## پاسخ سؤال ۸: (۱/۵ نمره)

$$\min = a - 2|b| = a - 2b = -1$$

تابع به ازای  $\frac{3\pi}{4}$  بیشترین مقدار خودش را دارد پس  $\frac{3\pi}{4}$  را در ضابطه قرار دهیم باید کمان  $\frac{\pi}{4}$  شود.

$$\frac{b}{3} \times \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 3$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۸)

## پاسخ سؤال ۹: (۱ نمره)

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha} = \frac{1 - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}} = -7$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۴۲)

## پاسخ سؤال ۱۰: (۲ نمره)

$$\text{الف) } \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos x = \cos(\pi - x)$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{7k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ب) } \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cot 2x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$\frac{\pi}{4} - x = k\pi + \frac{\pi}{4} - 2x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)



## پاسخ سؤال ۱۱: (۲ نمره)

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{[x]+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-1+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{0}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} 0 = 0 \text{ (نمره } \frac{5}{5} \text{)}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{x^2-3x} - \frac{2x^2+3}{x^2+3x} \right) \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} \right) = 0 - 2 = -2 \text{ (نمره } \frac{5}{5} \text{)}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{2x+\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x+|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x-x} = 2 \text{ (نمره } \frac{5}{5} \text{)}$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| + \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} + 1 = +\infty \text{ (نمره } \frac{5}{5} \text{)}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۵۵، ۵۸ و ۶۶)

## پاسخ سؤال ۱۲: (۱ نمره)

$$۱) n=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{3x-1} = 1 \text{ (نمره } \frac{5}{5} \text{)}$$

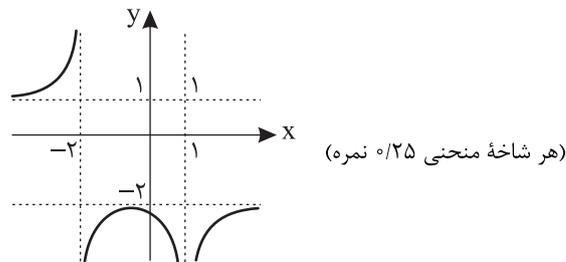
$$۲) n \geq 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x^n + 2x-1} = 0 \text{ (نمره } \frac{5}{5} \text{)}$$

## پاسخ سؤال ۱۳: (۱ نمره)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + bx - 6x^2 + 2x}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-6)x^2 + (b+2)x}{2x-1} = 4 \Rightarrow \begin{cases} a-6=0 \Rightarrow a=6 \text{ (نمره } \frac{25}{25} \text{)} \\ \frac{b+2}{2} = 4 \Rightarrow b=6 \text{ (نمره } \frac{25}{25} \text{)} \end{cases} \Rightarrow a-b=0 \text{ (نمره } \frac{5}{5} \text{)}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۲)

## پاسخ سؤال ۱۴: (۱ نمره)



(هر شاخه منحنی ۲۵ نمره)

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

## پاسخ سؤال ۱۵: (۱/۵ نمره)

$$\begin{cases} |x+1|=3 \Rightarrow \begin{cases} x+1=3 \Rightarrow x=2 \text{ (نمره } \frac{25}{25} \text{)} \\ x+1=-3 \Rightarrow x=-4 \text{ (نمره } \frac{25}{25} \text{)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x-1}}{x-2} = 2 \Rightarrow y=2 \text{ (نمره } \frac{25}{25} \text{)}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۶۹)

سبب گروه	گروه طراحی و بازنگری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران (به ترتیب حروف الفبا)
حسین شفیعی زاده	مهرداد کیوان - ماهان متش - علی اصغر ناری	ابوالفضل فروغی - محمد منتظران

واحد فنی (به ترتیب حروف الفبا)

زهرا احدی - امیرعلی الماسی - مبینا بهرامی - معین الدین تقی زاده - پریا رحیمی - مهرداد شمسی - رضیه صالحی - انسیه مرزبان



## پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(الف) نادرست (ب) درست (ج) درست (د) نادرست

توضیحات آموزشی:

(الف) تابع  $f(2x)$  از انقباض افقی  $f(x)$  به دست می آید. بنابراین طول نقاط نصف می شود و جواب درست  $A'(1, 3)$  است.

(ب) به ازای  $x = -1$  عبارت  $x^6 - 1$  برابر صفر است پس  $x^6 - 1$  بر  $x + 1$  بخش پذیر است.

(ج) از قضیه پرتوان استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^7 + 2x^7 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^7) = -\infty$$

(د) تابع را ساده می کنیم:

$$y = \frac{x(x+1)}{x^2} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$$

پس  $x = 0$  مجانب قائم است.

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۱۰، ۲۲، ۵۵ و ۶۵)

## پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(الف)  $[4, +\infty)$  (ب)  $\pm 2$  (ج)  $+\infty$  (د)  $y = 0$

توضیحات آموزشی:

(الف) تابع  $\log x$  اکیداً صعودی است. پس:

$$\log(x+1) \leq \log(2x-3) \Rightarrow x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow 4 \leq x$$

با این شرط، دو شرط دامنه یعنی  $x+1 > 0$  و  $2x-3 > 0$  هم برقرار است.

(ب) مقدار چندجمله ای به ازای  $x = a$  برابر صفر است.

$$x^2 + ax - 8 = a^2 + a^2 - 8 = 2a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

(ج) چون  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = +\infty + 1 = +\infty$$

(د)

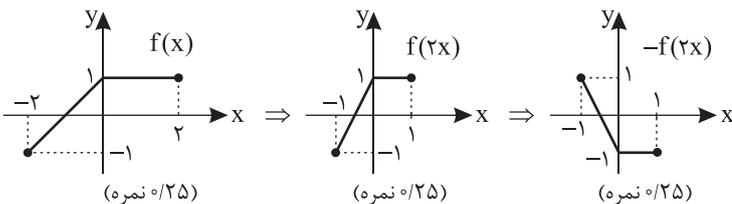
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

پس  $y = 0$  مجانب افقی است.

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۱۸، ۱۹، ۵۴ و ۶۸)

## پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)

به صورت مرحله ای نمودار تابع خواسته شده را رسم می کنیم:



دامنه تابع نهایی برابر  $[-1, 1]$  (۲۵/۰ نمره) و برد آن برابر  $[-1, 1]$  (۲۵/۰ نمره) است. در بازه  $[0, 1]$  هم صعودی است و هم نزولی. (۲۵/۰ نمره)

توضیحات آموزشی: برای آنکه از  $f(x-1)$  به  $f(x)$  برسیم باید نمودار  $f(x-1)$  را یک واحد به چپ انتقال دهیم و برای آنکه از  $f(x)$  به  $-f(2x)$  برسیم، باید طول نقاط را نصف و عرض نقاط را قرینه کنیم.

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۸ و ۱۰)



پاسخ سؤال ۴: (۱ نمره)

(۲۵/۰ نمره)  $f(\frac{x}{k}) \Rightarrow$  طول نقاط در ۲ ضرب

(۲۵/۰ نمره)  $f(\frac{x-3}{2}) \Rightarrow$  ۳ واحد به راست

(۲۵/۰ نمره)  $4f(\frac{x-3}{2}) \Rightarrow$  عرض نقاط ۴ برابر

(۲۵/۰ نمره)  $4f(\frac{x-3}{2}) + 2 \Rightarrow$  ۲ واحد به بالا

توضیحات آموزشی: اگر طول نقاط  $f(x)$  را  $k$  برابر کنیم، تابع  $f(\frac{x}{k})$  به دست می‌آید. اگر  $k > 0$  باشد، نمودار  $f(x-k)$  از انتقال افقی  $f(x)$  به سمت راست به دست می‌آید.

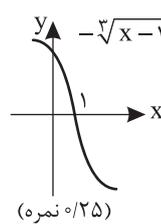
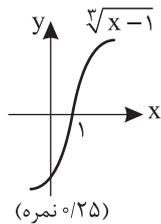
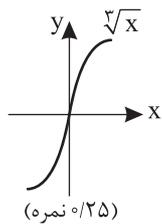
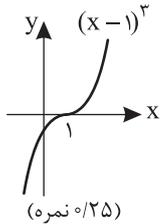
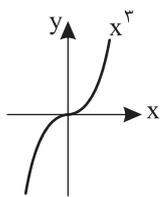
اگر عرض نقاط  $f(x)$  را  $k$  برابر کنیم، تابع  $kf(x)$  به دست می‌آید.

اگر  $k > 0$  باشد، نمودار  $f(x) + k$  از انتقال عمودی  $f(x)$  به سمت بالا به دست می‌آید.

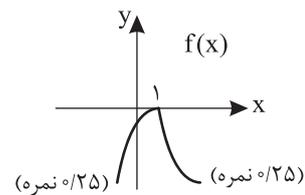
(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۷، ۳ و ۹)

پاسخ سؤال ۵: (۲ نمره)

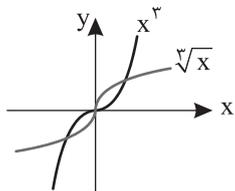
(الف)



(ب) در بازه  $[1, +\infty)$  نزولی (۲۵/۰ نمره) و در بازه  $(-\infty, 1]$  صعودی (۲۵/۰ نمره) است.



توضیحات آموزشی: وارون تابع  $y = x^3$  تابع  $y = \sqrt[3]{x}$  است که نمودار آن به صورت زیر است:



(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۱۸ و ۲۱)

پاسخ سؤال ۶: (۱/۵ نمره)

(۲۵/۰ نمره)  $f(2) = 0 \Rightarrow 8 - 16 + 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$  (۲۵/۰ نمره)

(۲۵/۰ نمره)  $x - a = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$  (۲۵/۰ نمره)

(۲۵/۰ نمره)  $R = \frac{f(2x-3)}{f(1)} = \frac{f(1)}{f(1)} = \frac{1-4+a+4}{1-4+a+4} = 3$  (۲۵/۰ نمره)

توضیحات آموزشی: باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $ax + b$  برابر  $f(-\frac{b}{a})$  است.

(حسابان دوازدهم، صفحه‌های ۱۹ و ۲۲)



## پاسخ سؤال ۷: (۱/۵ نمره)

$$\begin{cases} \max = 2 + |a| & (\text{نمره } 0/25) \\ \min = 2 - |a| & (\text{نمره } 0/25) \end{cases} \Rightarrow 2 + |a| = 2 - |a| + 6 \Rightarrow |a| = 3 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\text{ب) } T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{a}|} = 2|a| = 6 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

توضیحات آموزشی: در تابع  $y = a \sin bx + c$  روابط زیر برقرار است:

$$\max = c + |a|$$

$$\min = c - |a|$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۷)

## پاسخ سؤال ۸: (۲ نمره)

$$\begin{cases} \max = c + |a| = 2 & (\text{نمره } 0/25) \\ \min = c - |a| = -2 & (\text{نمره } 0/25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 & (\text{نمره } 0/25) \\ |a| = 2 & (\text{نمره } 0/25) \end{cases} \xrightarrow{a < 0} a = -2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$T = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \quad (\text{نمره } 0/25) \Rightarrow b = \pm 2 \quad (\text{هر دو مقدار قابل قبول است})$$

$$f(x) = c + a \cos bx = -2 \cos(2x) \quad (\text{نمره } 0/25)$$

توضیحات آموزشی: فاصله افقی بین نقاط  $\max$  و  $\min$  متوالی برابر نصف دوره تناوب است. در تابع  $y = a \cos bx + c$  اگر  $a > 0$  باشد، روی محور  $y$ ها ماکزیمم و اگر  $a < 0$  باشد، روی محور  $y$ ها مینیمم داریم.

(حسابان دوازدهم، صفحه ۲۸)

## پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

$$2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 = 0 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\sin x = t \Rightarrow 2t^2 - 9t - 5 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}, t = 5$$

$t = 5$  قابل قبول نیست.

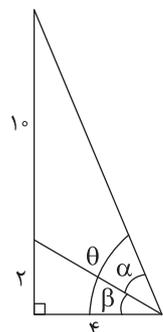
$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} & (\text{نمره } 0/25) \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} & (\text{نمره } 0/25) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

توضیحات آموزشی: جوابهای معادله مثلثاتی  $\sin x = \sin \alpha$  به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۴۰)

## پاسخ سؤال ۱۰: (۱ نمره)



$$\tan \alpha = \tan(\theta - \beta) = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta} = \frac{\frac{12}{4} - \frac{2}{4}}{1 + \frac{12}{4} \times \frac{2}{4}} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{5}{5} = 1 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

توضیحات آموزشی: روابط زیر برای تانژانت مجموع زوایا برقرار است:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۴۳)



## پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۵ نمره)

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{\sin x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(نمره ۰/۲۵)

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x^2 - 4} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(نمره ۰/۲۵)

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{4} = 0 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(نمره ۰/۲۵)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

توضیحات آموزشی: الف) اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  آنگاه

علامت جواب از روی علامت  $f$  و  $g$  در همسایگی محذوف  $a$  به دست می آید.

ب) قضیه پرتوان: اگر  $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$  و  $g(x) = a'x^m + b'x^{m-1} + \dots$  دو چندجمله ای باشند، آنگاه:

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{a'x^m}$$

(حسابان دوازدهم، صفحه های ۵۳ و ۶۶)

## پاسخ سؤال ۱۲: (۲ نمره)

باید صورت عامل  $x - 3$  داشته باشد که با مخرج ساده شود.

$$x^2 + ax + 3 = 0 \xrightarrow{x=3} 9 + 3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -4 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-1}{x+1} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(نمره ۰/۲۵)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

توضیحات آموزشی: اگر  $f$  و  $g$  دو چندجمله ای و تابع  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  تا حد امکان ساده شده باشد، آنگاه ریشه های مخرج کسر، مجانب های قائم تابع  $\frac{f}{g}$  است.

(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۶)

## پاسخ سؤال ۱۳: (۰/۷۵ نمره)

$$\text{مجانِب قائم: } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\text{مجانِب افقی: } \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x - 2} = 3 \Rightarrow y = 3 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

نقطه  $A(2, 3)$  (نمره ۰/۲۵) نقطه برخورد مجانب هاست.

توضیحات آموزشی: در تابع  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  خط  $x = -\frac{d}{c}$  مجانب قائم و خط  $y = \frac{a}{c}$  مجانب افقی است.

در واقع ریشه مخرج مجانب قائم و حاصل  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  مجانب افقی است.

## پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۲۵ نمره)

باید  $x = 1$  ریشه مضاعف مخرج باشد. (نمره ۰/۲۵)

$$2x^2 + bx + c = 2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \quad (\text{نمره } 0/25) \\ c = 2 \quad (\text{نمره } 0/25) \end{cases}$$

توضیحات آموزشی: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$  یا  $-\infty$  باشد، آنگاه  $x = a$  ریشه مضاعف مخرج است.

به تفاوت دو مثال زیر توجه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)(x+2)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty$$

(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۸)

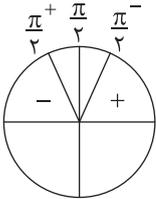


## پاسخ سؤال ۱۵: (۵/۰ نمره)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \quad (\text{نمره } 0/25)$$

توضیحات آموزشی: مقدار  $\tan \alpha$  وقتی  $\alpha$  در ناحیه اول دایره مثلثاتی است، مثبت است و مقدار  $\tan \alpha$  وقتی  $\alpha$  در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است، منفی است.



(حسابان دوازدهم، صفحه ۵۳)

سبب گروه	گروه طراحی و بازنگری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران
حسین شفیع زاده	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان ماهان متش - علی اصغر ناری	ابوالفضل فروغی - محمد منتظران

واحد فنی (به ترتیب حروف الفبا)		
زهرا احدی - امیرعلی الماسی - مبینا بهرامی - معین الدین تقی زاده - پریا رحیمی - مهرداد شمسی - راضیه صالحی - انسیه مرزبان		