



دفترچه سوال

ریاضیات گسسته پایه دوازدهم

آرشیو آزمون‌های تشریحی نیمسال اول

دی ماه - ۱۴۰۱ تا ۱۴۰۳



مرکز پژوهش آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

صفحه ۱ از ۲

باسمه تعالی

آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: ریاضیات گسسته

بارم	سؤال	ردیف
۱/۵	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) عدد $2^{2^n} + 1$ به ازای $n = \dots\dots\dots$ برابر عددی اول نیست. ($n \in \mathbb{N}$) ب) اگر عدد a ، عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد، آنگاه عدد a ، عدد c را می‌شمارد؛ این خاصیت را $\dots\dots\dots$ برای رابطه عاد کردن می‌نامیم. ج) گرافی را که تنها از یک $\dots\dots\dots$ تشکیل شده باشد، با P_n نمایش می‌دهیم.	۱
۱	درست یا نادرست بودن عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) تعداد رأس‌های فرد گراف، عددی زوج است. ب) در هر گراف ساده، تعداد عضوهای مجموعه همسایگی بسته یک رأس برابر با درجه آن رأس می‌باشد. ج) گراف C_n ، گرافی همبند و فاقد دور است. د) عدد 1401 به دسته هم‌نهشتی $5 \mid 11$ تعلق دارد.	۲
۱/۷۵	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست مثال نقض ارائه دهید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، $a^2 + b^2$ زوج است.	۳
۱/۲۵	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $2\beta - \alpha$ گنگ است.	۴
۱	اگر $a \neq 0$ و دو عدد $7m + 7$ و $6m + 6$ بر a بخش پذیر باشند، ثابت کنید: $a = \pm 1$.	۵
۲	الف) ثابت کنید هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول هستند. ب) حاصل هر مورد را به دست آورید. $A = ((m^3, m^4), [m^2, m^5])$ $B = ([112, 35], 154)$	۶
۱/۲۵	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر عدد 13 به ترتیب 5 و 3 باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $3m - 7n$ بر 13 را به دست آورید.	۷
۱/۵	باقی‌مانده تقسیم $A = (3 \times 13^{1401} + 5) \times 8$ را بر 17 بیابید.	۸
۱/۷۵	اگر دو عدد $3a - 9$ و $6a + 6$ رقم یکسان برابر داشته باشند، رقم یکسان $6a^2 + 9a$ را به دست آورید.	۹



مرکز پیش‌آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

آزمون تشریحی هماهنگ دی‌ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

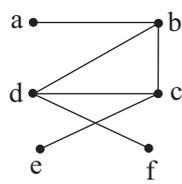
نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: ریاضیات گسسته

کلاس:

بارم	سؤال	ردیف
۱/۲۵	معادله هم‌نهشتی $۸۲ \equiv ۱۹۵x \pmod{۷}$ را حل کنید.	۱۰
۱/۷۵	به چند طریق می‌توان یک کیسه ۹۲ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟	۱۱
۱/۲۵	<p>گراف G را به صورت زیر در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) $\delta(G)$ را مشخص کنید.</p> <p>ب) مجموع درجه‌های رئوس این گراف را تعیین کنید.</p> <p>ج) مجموعه همسایگی باز رأس c را بنویسید.</p>	۱۲
۱/۵	<p>در گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ داریم: $N_G(b) = \{b, a, d\}$، $N_G(a) = \{b, c\}$، $N_G(c) = \{a, e, f\}$، $N_G(d) = \{b, d\}$، $N_G(e) = \{e, f, c\}$ و $N_G(f) = \{e, c\}$.</p> <p>الف) نمودار گراف را رسم کنید.</p> <p>ب) یک مسیر به طول ۴ از d به f بنویسید.</p> <p>ج) درجات رئوس در گراف \bar{G} را تعیین کنید.</p>	۱۳
۱/۲۵	تعداد یال‌های یک گراف ۵-منتظم از مرتبه ۲۰ چقدر از تعداد یال‌های یک گراف کامل مرتبه ۹ بیشتر است؟	۱۴
۲۰	جمع بارج	





مرکز پژوهش آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۱

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۲

نام درس: ریاضیات گسسته (سری ۱) پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

ردیف	سؤال	بارم
۱	اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه ثابت کنید $4k + 1$ مربع کامل است.	۱
۲	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست؟	۱/۲۵
۳	به کمک برهان خلف ثابت کنید اگر b یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد، آنگاه حاصل $x + b$ یک عدد گنگ است.	۱
۴	فرض کنید a, b و c اعدادی صحیح هستند و $a \neq 0$. اگر $a b$ و $a c$ ثابت کنید: $a b + c$.	۱
۵	اگر عددی مانند k در \mathbb{Z} باشد، به طوری که $4k + 1 \mid 5$ ، ثابت کنید $16k^2 + 28k + 6 \mid 25$.	۰/۷۵
۶	فرض کنید a عدد طبیعی فرد باشد؛ حاصل $[14a, 35a^3, 42a^2]$ را به دست آورید.	۱
۷	ثابت کنید اگر p عددی اول و $p > 3$ باشد، آنگاه p به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می شود.	۱/۵
۸	اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۷ برابر ۶ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۱۴ را به دست آورید.	۱/۲۵
۹	فرض کنید $a, b \in \mathbb{Z}$ و $m \in \mathbb{N}$ باشد. اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n \in \mathbb{N}$ ، ثابت کنید: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.	۱
۱۰	باقی مانده تقسیم عدد $A = 3^{45} \times 2 + 12$ را بر ۱۳ به دست آورید.	۱
۱۱	اگر دو عدد $9a - 3$ و $8a + 14$ ، رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $3a + 2$ را به دست آورید.	۱
۱۲	اگر ۶ مرداد ماه پنجشنبه باشد، ۱۹ بهمن ماه همان سال چه روزی است؟	۱/۲۵
۱۳	معادله هم نهشتی $12x \equiv 5 \pmod{17}$ را حل کنید.	۱
۱۴	معادله سیاله $5x + 11y = 36$ را حل کنید.	۱



مرکز تحقیق آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۱

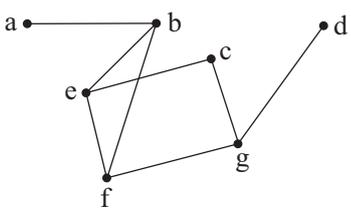
مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۲ از ۲

نام درس: ریاضیات گسسته (سری ۱) پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

بارم	سؤال	ردیف
۲/۲۵	<p>برای گراف G داریم: $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $E(G) = \{ab, bf, ef, ac, ec\}$:</p> <p>(الف) مرتبه و اندازه گراف را مشخص کنید.</p> <p>(ب) Δ و δ را در گراف مشخص کنید.</p> <p>(ج) یک مسیر به طول ۴ بنویسید.</p> <p>(د) این گراف همبند است یا ناهمبند؟</p> <p>(ه) گراف \bar{G} را رسم کنید.</p>	۱۵
۱/۲۵	<p>گراف P_7 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.</p>	۱۶
۱/۵	 <p>در گراف زیر موارد خواسته شده را بنویسید.</p> <p>(الف) $N_{\bar{G}}[c]$</p> <p>(ب) یک دور به طول ۵</p> <p>(ج) اندازه گراف \bar{G}</p>	۱۷
۲۰	جمع بارم	



مرکز پژوهش‌های آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

پیش‌آزمون تشریحی هماهنگ دی‌ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۱

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۲

نام درس: ریاضیات گسسته (سری ۲) پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$</p> <p>(ب) اگر $a \mid b$ و n و m دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$، آنگاه $a^m \mid b^n$</p> <p>(ج) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n \mid m$ آنگاه $a \equiv b \pmod{n}$</p> <p>(د) مینیمم درجه در یک گراف ساده عددی غیر صفر است.</p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p>	۱
۱/۲۵	<p>جاهای خالی را پر کنید.</p> <p>(الف) در تقسیم عدد -۱۴۳ بر ۱۷، باقی‌مانده و خارج‌قسمت است.</p> <p>(ب) $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشد:</p> <p>۱) $a \mid c, b \mid c$ ۲) $\forall m > 0, \dots\dots\dots$</p> <p>(ج) گراف G را می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.</p>	۲
۱/۵	<p>a_1, a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1, b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) + ۲$ عددی زوج است.</p>	۳
۱	<p>برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید: $x^2 + y^2 + \frac{5}{4} \geq xy + 2x + y$</p>	۴
۱/۲۵	<p>اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(3a + 2, 7a + 3)$ را به دست آورید.</p>	۵
۱	<p>ثابت کنید مربع هر عدد فرد به شکل $8k + 1$ است.</p>	۶
۱/۵	<p>اگر باقی‌مانده تقسیم a بر دو عدد ۵ و ۶ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۳۰ را بیابید.</p>	۷
۱	<p>برای اعداد صحیح a, b و c عدد طبیعی m ثابت کنید اگر $a \equiv b \pmod{m}$ باشد، آنگاه $ac \equiv bc \pmod{m}$.</p>	۸
۱/۵	<p>باقی‌مانده تقسیم $۶ - 7^{30}$ بر ۱۵ را به دست آورید.</p>	۹
۰/۷۵	<p>رقم یکان عدد 9^{401} را بیابید.</p>	۱۰
۱	<p>باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 1401!$ بر عدد ۱۲۰ را به دست آورید.</p>	۱۱



مرکز تحقیق و توسعه آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۱

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۲ از ۲

نام درس: ریاضیات گسسته (سری ۲) پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

بارم	سؤال	ردیف
۱/۲۵	اگر امروز جمعه بوده و m روز بعد سه شنبه باشد، برای m چند مقدار دورقمی وجود دارد؟	۱۲
۱/۵	همه اعداد صحیحی را بیابید که پنج برابر آنها منهای ۷ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.	۱۳
۱	یک گراف ۷ رأسی غیرتهی k - منتظم رسم کنید که: الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱۴
۰/۷۵	در یک گراف کامل، داریم: $q = p + 9$. مرتبه این گراف را به دست آورید.	۱۵
۱/۵	در یک گراف از مرتبه ۱۵ و اندازه ۱۰۱، حداکثر و حداقل چند رأس از درجه ۱۴ وجود دارد؟	۱۶
۱/۲۵	یک گراف کامل از مرتبه ۹ چند دور به طول ۴ دارد؟	۱۷
۲۰	جمع بارج	



مرکز پژوهش آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۲

نام درس: ریاضیات گسسته (سری ۱) پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

ردیف	سؤال	بارم
۱	درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید. (الف) برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a + b \neq 0$ باشد، تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست (ب) تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی فرد است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست (ج) مینیمم درجه در یک گراف ساده، عددی غیرصفر است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست (د) اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ و $(m, c) = d$ آنگاه $a \equiv b \pmod{m}$ برقرار خواهد بود. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست	۱
۲	هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات یا با ارائه مثال نقض، رد کنید. (الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، $a^2 + b^2$ زوج است. (ب) اگر $a b + c$ و $a b$ و $(b, c) \neq 1$ آنگاه $a c$ یا $a b$.	۱/۵
۳	اگر a و b دو عدد زوج متوالی باشند، ثابت کنید $ab + 1$ عددی مربع کامل است.	۱
۴	اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد، آنگاه باقیمانده n بر ۴ چه اعدادی می‌تواند باشد؟ (n عددی طبیعی است).	۱
۵	به کمک برهان خلف ثابت کنید اگر b یک عدد گویا و y یک عدد گنگ باشد آنگاه $b + y$ یک عدد گنگ است.	۱
۶	به کمک اثبات بازگشتی ثابت کنید: $4x^2 + 9y^2 \geq -2 - 4x + 6y$	۱
۷	اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $(5k + 9)$ و $(8k + 13)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a = 1$ یا $a = 7$	۰/۷۵
۸	حاصل عبارتهای زیر را بیابید. (الف) $[m^5, (m^3, m^4)]$ (ب) $[(144, 60), 63]$	۱
۹	فرض کنیم $a \equiv b \pmod{m}$ و $b \equiv c \pmod{n}$ و $(m, n) = d$ ، در این صورت ثابت کنید $a \equiv c \pmod{d}$.	۱/۵
۱۰	ثابت کنید باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.	۱/۲۵
۱۱	باقیمانده تقسیم عدد $A = (2^{123} + 9) \times 7$ را بر ۱۳ بیابید.	۱/۵



مرکز تحقیق آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۲

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: ریاضیات گسسته (سری ۱) پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

بارم	سؤال	ردیف
۱/۵	تعداد اعداد طبیعی دورقمی x که در رابطه زیر صدق می کند کدام است؟ $6x \equiv (2! + 3! + \dots + 50!) \pmod{10}$	۱۲
۱/۵	معادله سیاله $7x + 25y = 30$ را حل نمایید.	۱۳
۱	فرض کنید $V = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه رئوس گراف G و $E = \{ab, bc, cd, de, eb, ae\}$ مجموعه یال های گراف G باشند. الف) گراف G را رسم کنید. ب) زیرگراف G را چنان رسم کنید که درجه رأس b در آن ۳ باشد.	۱۴
۱/۵	در گراف G مجموعه همسایگی بسته هر رأس دارای ۴ عضو است. اگر $p(G) = 6$ باشد، حاصل $\Delta(\bar{G}) + q(G)$ را به دست آورید.	۱۵
۱	در یک گراف کامل از مرتبه ۷ با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ، چند مسیر به طول ۳ از a به b وجود دارد؟	۱۶
۱	گرافی از مرتبه ۹ رسم کنید که فقط دورهایی به طول ۹ و ۸ و ۶ و ۵ داشته باشد و هیچ دور دیگری نداشته باشد؟	۱۷
۲۰	جمع بارم	



مرکز پژوهش آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۲

نام درس: ریاضیات گسسته (سری ۲) پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) میانگین ۷ عدد طبیعی متوالی، برابر میانگین کوچکترین و بزرگترین عدد در بین این اعداد می باشد. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند آنگاه $a^2 + ab + b^2 > 0$ <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>ج) اعداد مثبت x و y وجود دارند به طوری که $\sqrt[3]{x+y} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$ <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>د) هر گراف کامل K_n دارای حداقل یک زیرگراف به صورت P_n است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p>	۱
۱/۵	<p>جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف) تعداد یال های گراف منتظم غیر کامل از مرتبه ۷، حداکثر است.</p> <p>ب) اگر $15a \equiv 20b \pmod{30}$ به پیمانه ۳۰ باشد آنگاه $3a \equiv 4b \pmod{30}$ به پیمانه است.</p> <p>ج) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی و متوالی باشد، آنگاه $4k+1$، است.</p>	۲
۱	<p>برای هر یک از گزاره های زیر، یک مثال نقض ارائه کنید.</p> <p>الف) اگر a و b و c عددهای صحیح باشند به طوری که $a^2 bc$، آنگاه $a^2 (a c) \vee (a b)$</p> <p>ب) برای هر عدد طبیعی n حداقل یکی از اعداد $2^n + 1$ یا $n^2 + 1$ عددی اول هستند.</p>	۳
۲/۵	<p>هر یک از گزاره های زیر را اثبات کنید.</p> <p>الف) نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n، $3n^2 - n + 11$ عددی فرد است.</p> <p>ب) نشان دهید که برای هر سه عدد حقیقی x, y, z داریم: $x^2 + y^2 + 3 \geq 2x + y + xy$</p>	۴
۱	<p>اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.</p>	۵
۱	<p>ثابت کنید اگر عدد a، عدد b را بشمارد و عدد b، عدد c را بشمارد، آنگاه عدد a، عدد c را می شمارد. ($a, b, c \in \mathbb{Z}$)</p>	۶
۱/۵	<p>باقیمانده تقسیم عدد صحیح a بر دو عدد ۸ و ۱۱ به ترتیب ۳ و ۲ می باشد. باقیمانده a بر ۴۴ محاسبه کنید.</p>	۷
۱	<p>حاصل عبارت $[240, 96, 144]$ را به دست آورید.</p>	۸
۱/۲۵	<p>a و b اعداد صحیح و m عدد طبیعی مخالف یک می باشد. ثابت کنید اگر $a \equiv b \pmod{m}$ آنگاه $a^n \equiv b^n \pmod{m}$. ($n \in \mathbb{N}$)</p>	۹
۱/۵	<p>باقیمانده تقسیم عدد $4^{100} - 3^{100} - 5^{100}$ بر ۱۴۴ را بیابید.</p>	۱۰



مرکز تدریس آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۲

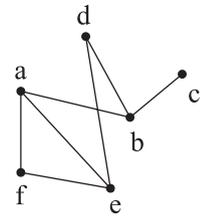
مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۲ از ۲

نام درس: ریاضیات گسسته (سری ۲) پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

بارم	سؤال	ردیف
۱	امسال روز تولد پدرم دوشنبه و روز تولد من پنجشنبه است. اگر اختلاف روزهای تولد من و پدرم، بزرگ‌ترین عدد دورقمی ممکن باشد، این مقدار را به دست آورید.	۱۱
۱/۵	۸۷ کیلوگرم شکر را در کیسه‌های ۳ و ۵ کیلویی جای می‌دهیم. کمترین تعداد کیسه‌های به کار رفته برای این کار را بیابید.	۱۲
۲	در گراف G با مجموعه رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، شرایط زیر برقرار است: $N_G(d) = \{b, e, f\}$, $N_G(f) = \{d\}$, $N_G(a) = \{b, c, e\}$, $N_G[b] = \{b, d, a\}$ $\deg(e) = 2$, $\deg(c) = 1$ الف) گراف G را رسم کنید. ب) اگر بخواهیم با حذف تنها یک یال، گراف G ناهمبند شود، آن یال (یال‌ها) را بنویسید. ج) گراف \bar{G} را رسم کرده و عضوهای مجموعه $N_{\bar{G}}[e] - N_G(a)$ را مشخص کنید.	۱۳
۲/۲۵	 <p>گراف G، در شکل زیر رسم شده است. الف) همه مسیرها از رأس a به رأس b را بنویسید. ب) ۳ زیرگراف از مرتبه ۳ برای گراف G مشخص کنید. ج) یک دور با طول ۵ در گراف G مشخص کنید.</p>	۱۴
۲۰	جمع بarm	

آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: ریاضیات گسسته



مرکز نخبش آموزش مدارس برتر

صفحه ۱ از ۲

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) عدد $2^{2^n} + 1$ به ازای $n = 5$ عددی اول است.</p> <p>ب) حاصل $(3m+1, 3m+2)$ برابر ۱ می باشد. ($m \in \mathbb{Z}$)</p> <p>ج) معادله $21x \equiv 13 \pmod{25}$ در اعداد صحیح جواب دارد.</p> <p>د) در گراف Γ - منتظم از مرتبه p، اگر p عددی فرد باشد، مقدار Γ حتماً زوج است.</p>	۱
۱/۵	<p>جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف) $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط روبه‌رو برقرار باشند:</p> <p>ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$، می‌گوییم a و b هستند.</p> <p>ج) در تقسیم عدد $156 -$ بر 7 باقی‌مانده برابر و خارج قسمت است.</p> <p>د) تعداد یال‌های گراف K_p، برابر است.</p>	۲
۱/۵	<p>اگر a و b دو عدد صحیح باشند با روش اثبات با در نظر گرفتن تمام حالت‌ها ثابت کنید عدد $A = ab(a-b)$ همواره زوج است.</p>	۳
۱/۵	<p>اگر a_1 و a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1 و b_2 و b_3 همان اعداد که با ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند باشند، ثابت کنید $(a_1 + b_1)(a_2 + 2b_2)(a_3 + 5b_3)$ عددی زوج است.</p>	۴
۱	<p>اگر x و y و z سه عدد حقیقی دلخواه باشند، ثابت کنید: $x^2 + y^2 + z^2 + 2 \geq 2(x-y)$</p>	۵
۱	<p>اگر $a 2m^2 + 1$ و $a 6m^2 + 1$، در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟ ($m \in \mathbb{Z}$)</p>	۶
۱	<p>ثابت کنید دو عدد $11m + 9$ و $6m + 5$ برای هر عدد طبیعی m همواره نسبت به هم اول هستند.</p>	۷
۱/۵	<p>اگر باقیمانده تقسیم اعداد m و n بر 19 به ترتیب 11 و 7 باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم عدد $3m - 7n$ بر 19 چیست؟</p>	۸
۱/۵	<p>باقیمانده تقسیم $19 + 7 \times 3^{402}$ بر 82 چیست؟</p>	۹
۱	<p>اگر اول مهر ماه در یک سال، روز پنجشنبه باشد، ۱۷ اسفند همان سال، چه روزی از هفته می باشد؟</p>	۱۰



مرکز تخصصی آموزش مدارس برتر

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: ریاضیات گسسته

کلاس:

بارم	سؤال	ردیف
۱/۵	اگر باقیمانده تقسیم عدد a^2a^3a بر ۱۱ برابر ۱ باشد، آنگاه باقیمانده تقسیم عدد aa^2a^5 بر ۹ را به دست آورید.	۱۱
۱/۵	در معادله سیاله $17x + 14y = 1000$ ، اگر x بزرگ‌ترین عدد دورقمی و طبیعی باشد، مقدار y نظیر آن را محاسبه کنید.	۱۲
۳	<p>گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به گراف به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) مجموعه $N_G(e)$ را بنویسید.</p> <p>ب) یک دور به طول ۵ که شامل رأس b نباشد، بنویسید.</p> <p>ج) یک مسیر به طول ۶ از b به g بنویسید.</p> <p>د) گراف مکمل G چند یال دارد؟</p> <p>ه) ماکزیمم درجه در گراف مکمل G چند است؟</p> <p>و) در گراف H که در شکل زیر رسم شده کدام یال را حذف کنیم که H زیرگراف G شود؟</p>	۱۳
۱/۵	گراف G ، ۶-منتظم است و اندازه آن ۹ واحد بیشتر از ۲ برابر تعداد رئوس گراف است. چند یال به گراف G اضافه کنیم تا به گراف کامل هم‌مرتبه با G تبدیل شود؟	۱۴
۲۰	جمع بارم	



مرکز تحقیقات آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۳

صفحه ۱ از ۲

باسمه تعالی

پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۹۰ دقیقه

کلاس:

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: ریاضیات گسسته (سری ۲) پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

ردیف	سؤال	بارم
۱	<p>گزاره درست و نادرست را مشخص کنید.</p> <p>(الف) حاصل ضرب هر عدد گویا در هر عدد گنگ همواره گنگ است.</p> <p>(ب) اگر $a b$ آنگاه $a \leq b$ است.</p> <p>(ج) رقم یکان عدد $5! + 3^{25}$ برابر ۲ است.</p> <p>(د) در گراف G هر دو رأس مجاورند. اگر $V(G) = 5$ باشد، آنگاه $E(G) = 1$ است.</p>	۲
۲	<p>ثابت کنید عبارت $xy^3 - x^3y$ ($x, y \in \mathbb{Z}$) همواره بر ۳ بخش پذیر است.</p>	۱/۵
۳	<p>با استفاده از اثبات برهان خلف ثابت کنید اگر α و β دو عدد گنگ ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، $5\alpha - \beta$ همواره گنگ است.</p>	۱
۴	<p>اگر عدد صحیح a، هر دو عبارت $3m + 6$ و $5m + 8$ را بشمارد، چه اعداد صحیحی می تواند باشد؟</p>	۱/۵
۵	<p>اگر باقیمانده تقسیم عدد صحیح a بر ۳ برابر ۲ باشد، باقیمانده $5a - 2$ بر عدد ۱۲ کدام است؟</p>	۱
۶	<p>اگر $3n + 1 5$ آنگاه ثابت کنید $16 + 51n + 9n^2 25$.</p>	۱/۵
۷	<p>اگر باقیمانده a بر دو عدد ۷ و ۵ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیمانده a بر عدد ۳۵ را به دست آورید.</p>	۱/۵
۸	<p>به سؤالات زیر پاسخ کوتاه دهید.</p> <p>(الف) حاصل $(24m, 20m^2, 8m^3)$ چه عددی است؟ ($m \in \mathbb{Z}$)</p> <p>(ب) اگر از $30y \equiv 15x$، رابطه $2x \equiv 3y$ را نتیجه بگیریم، m چه عددی است؟</p> <p>(ج) باقیمانده عدد 152743 بر عدد ۱۱ چه عددی است؟</p> <p>(د) بیشترین تعداد یال یک گراف k-منتظم غیر کامل مرتبه ۷ کدام است؟</p>	۲



مرکز تحقیقات آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۳

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۹۰ دقیقه

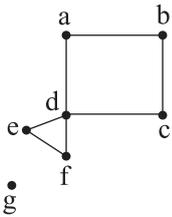
کلاس:

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: ریاضیات گسسته (سری ۲) پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

بارم	سؤال	ردیف
۱	اگر در سالی، اول مهرماه دوشنبه باشد، سومین جمعه فروردین چندم ماه بوده است؟	۹
۱/۵	اگر معادله $x^2 + x \equiv 16 \pmod{a}$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب باشد، x چند عدد طبیعی دورقمی می تواند باشد؟	۱۰
۱	به چند روش می توان ۶ تن برنج را در کیسه های ۲۴ کیلویی و ۱۸ کیلویی بسته بندی کرد؟	۱۱
۱/۵	در گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۱۹ مطلوب است: الف) بیشترین تعداد رأس با درجه δ چه تعدادی است؟ ب) حاصل $\sum_{i=1}^7 N_{[v_i]} $ کدام است؟	۱۲
۱/۵	گراف G زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید. الف) مسیری به طول ۴ در گراف مشخص کنید. ب) گراف مکمل شکل مقابل چند یال دارد؟ ج) دوری به طول ۳ در گراف مشخص کنید. د) گراف مقابل چند زیرگراف با $\Delta = 4$ دارد؟	۱۳
۱/۵	فرض کنید G یک گراف باشد، اگر $\delta \geq k$ ، آنگاه ثابت کنید G لزوماً یک مسیر به طول k دارد؟	۱۴
۲۰	جمع بارجم	





مرکز تحقیقات آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۳

صفحه ۱ از ۲

باسمه تعالی

آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۹۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: ریاضیات گسسته

کلاس:

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) مجموع پنج عدد طبیعی و متوالی مضرب ۵ می‌باشد.</p> <p>(ب) اگر $\delta(G) = 0$ آنگاه گراف G حتماً ناهمبند است.</p> <p>(ج) معادله $bx \equiv a \pmod{m}$ برای x جواب صحیح دارد اگر و تنها اگر $(a, m) b$.</p> <p>(د) A, B, C سه مجموعه دلخواه هستند اگر $A \cup B = A \cup C$، نمی‌توان $B = C$ را نتیجه گرفت. درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p>	۱
۱	<p>جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.</p> <p>(الف) اگر k حاصل ضرب سه عدد صحیح و متوالی باشد آنگاه بزرگ‌ترین عددی است که k همواره بر آن بخش پذیر است.</p> <p>(ب) در گراف P_1 حاصل $q + \Delta$ برابر می‌باشد.</p> <p>(ج) حاصل $(n + 2, n + 3)$ برابر می‌باشد.</p> <p>(د) در گراف K_4، دور به طول ۴ وجود دارد.</p>	۲
۱	<p>جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید و یا به صورت کوتاه پاسخ دهید.</p> <p>(الف) گراف G همبند است، اگر و تنها اگر بین هر دو رأس آن حداقل یک یافت شود.</p> <p>(ب) $(a, b) = d$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشد:</p> <p>۱) $d a, d b, d > 0$</p> <p>۲) $\forall m > 0, \dots$</p> <p>(ج) اگر α و β دو عدد گنگ و $\alpha + \beta$ گویا باشد، آنگاه $3\alpha + 2\beta$ می‌باشد.</p> <p>(د) در گراف K - منتظم از مرتبه $P, (0 \leq K \leq P - 1)$ اگر P فرد باشد حتماً می‌باشد.</p>	۳
۱	<p>اگر $n \in \mathbb{Z}$ باشد با در نظر گرفتن تمام حالت‌ها، ثابت کنید $n^2 - 7n + 17$ عدد فرد می‌باشد.</p>	۴
۱	<p>$121 9k^2 + 27k - 10$ و $k \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید:</p>	۵
۱/۵	<p>اگر باقیمانده تقسیم m بر n بر ۱۷ به ترتیب ۳ و ۱۱ باشد، باقیمانده تقسیم $m^3 - 2mn$ بر ۱۷ را به دست آورید.</p>	۶
۱/۵	<p>باقیمانده تقسیم $100 - 9 \times 7^{304}$ بر ۱۶ را به دست آورید.</p>	۷



مرکز تخصصی آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۳

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۹۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

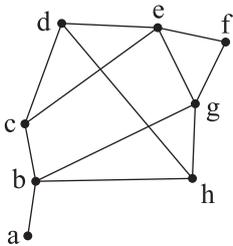
نام و نام خانوادگی:

کلاس:

مدرسه:

نام درس: ریاضیات گسسته

بارم	سؤال	ردیف
۱	اگر سوم آبان در یک سال، روز جمعه باشد، در همان سال روز اول فروردین چه روزی از هفته بوده است؟	۸
۱/۵	اگر $d = (\Delta n - 1, 2n^2 - 3n + 2)$ و $d \neq 1$ باشد مقدار عددی d را بیابید.	۹
۱/۵	معادله سیاله $38x + 22y = 1020$ را حل کنید.	۱۰
۱/۵	اولین عدد ۳ رقمی طبیعی که در معادله $24x \equiv 21 \pmod{15}$ صدق می کند را محاسبه کنید.	۱۱
۱	عدد a را چنان تعیین کنید که عدد ۵ رقمی $7a123$ به ۱۱ بخش پذیر باشد؟	۱۲
۱/۵	فرض کنید x, y, z سه عدد حقیقی باشند. با روش بازگشتی ثابت کنید: $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z)$	۱۳
۳	<p>گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>(الف) مقدار $q(G)$ چقدر است؟</p> <p>(ب) $N_G[g]$ را بنویسید.</p> <p>(ج) یک دور به طول ۶ شامل یال dh را بنویسید.</p> <p>(د) یک مسیر از a به f به طول ۶ بنویسید.</p> <p>(ه) گراف مکمل G چند یال دارد؟</p> <p>(و) یک زیرگراف ۲-منتظم از مرتبه ۷ گراف G را رسم کنید.</p>	۱۴
۱	گراف G ، سه رأس درجه $\Delta = 4$ و سه رأس درجه ۳ و دو رأس درجه ۲ دارد. اگر $\delta \neq 0$ و $q = 15$ باشد، مرتبه G کدام است؟	۱۵
۲۰	جمع بارم	





دفترچه پاسخنامه

ریاضیات گسسته پایه دوازدهم

آرشیو آزمون‌های تشریحی نیمسال اول



مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

پاسخنامه آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

پاسخنامه درس: ریاضیات گسسته

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

صفحه ۱ از ۲

پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۵/۰ نمره)

الف) ۵

ب) خاصیت تعدی

ج) مسیر n رأسی

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲، ۱۱ و ۳۸)

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) درست

ب) نادرست

ج) نادرست

د) نادرست

(ریاضیات گسسته، تمرین ۱، صفحه ۲۹ و صفحه‌های ۳۶، ۳۸ و ۴۰)

پاسخ سؤال ۳: (۱/۲۵ نمره)

الف) نادرست (۲۵/۰ نمره)

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^C \Rightarrow \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{Q}^C$$

(۲۵/۰ نمره)

(ریاضیات گسسته، مشابه قسمت (ث) کار در کلاس، صفحه ۳)

ب) درست. با توجه به فرد بودن عدد ab نتیجه می‌گیریم هر دو عدد a و b فرد هستند. اگر $a = 2m - 1$ و $b = 2n - 1$ باشد، داریم: (۲۵/۰ نمره)

(۲۵/۰ نمره)

(۲۵/۰ نمره)

$$a^2 + b^2 = (2m - 1)^2 + (2n - 1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 + 4n^2 - 4n + 1 = 2(2m^2 - 2m + 2n^2 - 2n + 1)$$

(۲۵/۰ نمره)

(ریاضیات گسسته، کار در کلاس الف، صفحه ۵)

پاسخ سؤال ۴: (۱/۲۵ نمره)

با برهان خلف می‌توان نوشت:

$$\text{حکم: } 2\beta - \alpha \notin \mathbb{Q}$$

$$\text{پس حکم درست است.} \Rightarrow \text{تناقض با فرض } \beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\alpha + \beta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\alpha + \beta) - \alpha = \beta \in \mathbb{Q}$$

(۲۵/۰ نمره)

(۲۵/۰ نمره)

(۲۵/۰ نمره)

(۵/۰ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه ۸)

پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

$$\begin{cases} a \mid 8m + 7 \Rightarrow a \mid 56m + 49 & (25/0 \text{ نمره}) \\ a \mid 7m + 6 \Rightarrow a \mid 56m + 48 & (25/0 \text{ نمره}) \end{cases} \Rightarrow a \mid (56m + 49) - (56m + 48) \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

(۲۵/۰ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۱)

پاسخ سؤال ۶: (۲ نمره)

الف) دو عدد k و $k+1$ متوالی هستند.

$$d = (k, k+1) \Rightarrow \begin{cases} d \mid k+1 \\ d \mid k \end{cases} \xrightarrow{-} d \mid 1 \xrightarrow{d > 0} d = 1$$

(۲۵/۰ نمره)

(۲۵/۰ نمره)

(۲۵/۰ نمره)

ب) چون $m^2 \mid m^5$ و $m^3 \mid m^6$ داریم:

$$A = ((m^2, m^3), [m^2, m^3]) = (|m^2|, |m^3|) = |m^2| \quad (5/0 \text{ نمره})$$

$$B = ([112, 25], 154) = ([2^4 \times 7, 5 \times 7], 2 \times 7 \times 11) = (2^4 \times 5 \times 7, 2 \times 7 \times 11) = 2 \times 7 = 14 \quad (5/0 \text{ نمره})$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

پاسخ سؤال ۷: (۱/۲۵ نمره)

$$\begin{cases} m = 13k + 5 & (25/0 \text{ نمره}) \\ n = 13t + 3 & (25/0 \text{ نمره}) \end{cases} \Rightarrow 3m - 7n = 3(13k + 5) - 7(13t + 3) = 39k + 15 - 91t - 21 = 39k - 91t - 6$$

(۲۵/۰ نمره)

$$= 39k - 91t - 13 + 7 = 13(3k - 7t - 1) + 7 = 13q + 7 \quad (25/0 \text{ نمره})$$

(۲۵/۰ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۴)

پاسخ سؤال ۸: (۱/۵ نمره)

$$13^2 \equiv -1 \pmod{7} \xrightarrow{\text{توان } 7^0} 13^{1400} \equiv 1 \pmod{7} \xrightarrow{\times 13} 13^{1401} \equiv 13 \pmod{7}$$

(۲۵/۰ نمره)

(۲۵/۰ نمره)

(۲۵/۰ نمره)

بنابراین:

$$3 \times 13^{1401} \equiv 3 \times 13 \equiv 5 \pmod{7}$$

(۲۵/۰ نمره)

پس:

$$A \equiv (\frac{17}{5} + \frac{17}{5}) \times \frac{17}{8} \equiv \frac{17}{12} \pmod{25}$$

(۲۵/۰ نمره)

(ریاضیات گسسته، تمرین ۹، صفحه ۳۹)



پاسخ سؤال ۹: (۱/۷۵) نمره

$$(3a - 9) \stackrel{!}{=} (6a + 6) \Rightarrow 3a \stackrel{!}{=} -15 \xrightarrow{(3, 1) \Rightarrow 1} a \stackrel{!}{=} -5$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

$$\Rightarrow 6a^2 + 9a \stackrel{!}{=} 6(-5)^2 + 9(-5) \stackrel{!}{=} 150 - 45 \stackrel{!}{=} 105 = \sqrt{105} \times 10 \stackrel{!}{=} 5$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

(ریاضیات گسسته، تمرین ۱۰، صفحه ۳۹)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱/۲۵) نمره

$\begin{array}{r} 195 \overline{) 7} \\ 14 \overline{) 27} \\ \hline 55 \\ 49 \overline{) 6} \end{array}$	$\begin{array}{r} 82 \overline{) 7} \\ 7 \overline{) 11} \\ \hline 12 \\ 7 \overline{) 5} \end{array}$	$\Rightarrow 6x \stackrel{!}{=} 5 \Rightarrow 6x \stackrel{!}{=} 5 + 7 \Rightarrow 6x \stackrel{!}{=} 12 \xrightarrow{(6, 7) \Rightarrow 1} x \stackrel{!}{=} 2 \Rightarrow x = 7k + 2$
(نمره ۰/۲۵)	(نمره ۰/۲۵)	(نمره ۰/۲۵)

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۴)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۷۵) نمره

تعداد وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی را به ترتیب X و Y در نظر می‌گیریم.

$$3x + 5y = 92 \Rightarrow 3x + 5y \stackrel{!}{=} 92 \Rightarrow 0 + 2y \stackrel{!}{=} 2 \xrightarrow{(3, 3) \Rightarrow 1} y \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow y = 3k + 1 \Rightarrow 3x + 5(3k + 1) = 92$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

$$\Rightarrow 3x + 15k + 5 = 92 \Rightarrow x = -5k + 29$$

(نمره ۰/۲۵)

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k + 1 \geq 0 \\ -5k + 29 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{29}{5} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

(ریاضیات گسسته، تمرین ۱۸، صفحه ۳۰)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱/۲۵) نمره

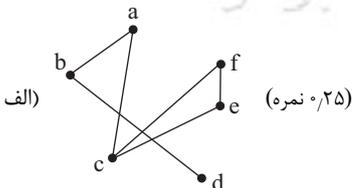
الف) $\delta(G) = 1$ (نمره ۰/۲۵)

ب) $\deg_G(a) = 1, \deg_G(b) = 3, \deg_G(c) = 3, \deg_G(d) = 3, \deg_G(e) = 1, \deg_G(f) = 1$
 \Rightarrow مجموع درجات رئوس $= 1 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 12$ (نمره ۰/۲۵)

ج) $N_G(c) = \{b, d, e\}$ (نمره ۰/۲۵)

(ریاضیات گسسته، تمرین ۲، صفحه ۴۱)

پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۵) نمره



ب) dbacf (نمره ۰/۲۵)

ج) $\bar{G} = 4, 3, 3, 3, 3, 2$ (نمره ۱)

(ریاضیات گسسته، تمرین‌های ۴ و ۵، صفحه ۴۱)

پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۲۵) نمره

$$\begin{cases} p = 20 \\ r = 5 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{pr}{r} = \frac{20 \times 5}{5} = 50$$

(نمره ۰/۵)

$$k_q : q = \binom{q}{r} = \binom{50}{5} = 36$$

(نمره ۰/۵)

(نمره ۰/۲۵) $= 50 - 36 = 14$ اختلاف تعداد یال‌ها

(ریاضیات گسسته، صفحه ۳۵)



مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

پاسخنامه پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۱

پاسخنامه درس: ریاضیات گسسته (سری ۱)

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

صفحه ۱ از ۲

پاسخ سؤال ۱: (۱ نمره)

$$k = n(n+1) = n^2 + n \Rightarrow 4k+1 = 4(n^2+n)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۳)

پاسخ سؤال ۲: (۱/۲۵ نمره)

این نامساوی همواره برقرار است. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ حکم

(ریاضیات گسسته، صفحه ۷)

پاسخ سؤال ۳: (۱ نمره)

$$\Rightarrow x+b=c \Rightarrow x=c-b \text{ گویا - گویا = گویا}$$

فرض کنیم حاصل $x+b$ گویا و برابر با c باشد.

یعنی x عددی گویا است و این تناقض است.

از این تناقض نتیجه می‌گیریم حاصل $x+b$ گویا نیست، پس گنگ است.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۵)

پاسخ سؤال ۴: (۱ نمره)

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; b=ak \\ a|c \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; c=aq \end{cases} \Rightarrow b+c=ak+aq \\ \Rightarrow b+c=a(k+q) \Rightarrow b+c=ak' \Rightarrow a|b+c$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۱)

پاسخ سؤال ۵: (۰/۷۵ نمره)

$$\Delta | 4k+1 \Rightarrow 2\Delta | 16k^2+8k+1 \text{ (نمره ۰/۲۵)} \xrightarrow{+} 2\Delta | 16k^2+28k+6 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

$$\Delta | 4k+1 \Rightarrow 2\Delta | 20k+5 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

(ریاضیات گسسته، سوال ۴، صفحه ۱۶)

پاسخ سؤال ۶: (۱ نمره)

$$(35a^2, 14a) = 7a(\Delta a^2, 2) \xrightarrow{\text{فرد } a} 7a \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

$$[42a^2, 7a] = 7a[6a, 1] \xrightarrow{(6a, 1)=1} 7a \times (6a \times 1) = 42a^2 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

(ریاضیات گسسته، تمرین ۱۶، صفحه ۱۷)

پاسخ سؤال ۷: (۱/۵ نمره)

هر عدد صحیح به یکی از ۶ صورت زیر است:

(۱) $p = 6k \Rightarrow 6|p$

(۲) $p = 6k+1$

(۳) $p = 6k+2 \Rightarrow p = 2(3k+1) \Rightarrow 2|p$

(۴) $p = 6k+3 \Rightarrow p = 3(2k+1) \Rightarrow 3|p$

(۵) $p = 6k+4 \Rightarrow p = 2(3k+2) \Rightarrow 2|p$

(۶) $p = 6k+5$

با توجه به این که $p > 3$ است، در حالت‌های (۱)، (۳)، (۴) و (۵)، p اول نیست، پس حکم ثابت می‌شود.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۵)

پاسخ سؤال ۸: (۱/۲۵ نمره)

$$a = 7q+6 \Rightarrow 2a+3 = 14q+15 = 14(q+1)+1 \Rightarrow 2a+3 = 14q'+1 \Rightarrow r=1$$

(ریاضیات گسسته، مشابه مثال صفحه ۱۴)

پاسخ سؤال ۹: (۱ نمره)

$$a \equiv b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1}) \Rightarrow m|a^n-b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

(ریاضیات گسسته، مشابه تمرین ۷، صفحه ۳۹)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱ نمره)

$$3^3 \equiv 1 \pmod{15} \rightarrow 3^{45} \equiv 1 \pmod{15} \rightarrow 3^{45} \times 2 \equiv 2 \pmod{15} \rightarrow 3^{45} \times 2 + 12 \equiv 14 \pmod{15}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۳۹)

با توجه به ویژگی‌های هم‌نهشتی:



مرکز پژوهش و آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

پاسخنامه پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۱

پاسخنامه درس: ریاضیات گسسته (سری ۲)

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

صفحه ۲ از ۳

پاسخ سؤال ۷: (۱/۵ نمره)

$$\begin{cases} a = 5q + 2 \\ a = 6q' + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a = 30q + 12 \\ 5a = 30q' + 15 \end{cases} \Rightarrow a = 30q'' - 3$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

$$\Rightarrow a = 30q'' - 3 + 30 - 30 \Rightarrow a = 30r + 27 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

(ریاضیات گسسته، مشابه تمرین ۹، صفحه ۱۶)

پاسخ سؤال ۸: (۱ نمره)

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | c(a - b) \Rightarrow m | ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

(ریاضیات گسسته، ویژگی ۲، صفحه ۱۹)

پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

$$7^{215} \equiv 4 \pmod{25} \Rightarrow 7^{415} \equiv 21 \pmod{25} \xrightarrow{\text{توان } 7} 7^{2815} \equiv 1 \pmod{25} \xrightarrow{\times 7^{215}} 7^{3015} \equiv 4 \pmod{25} \Rightarrow 7^{30} \equiv 4 \pmod{25} \Rightarrow 7^{15} \equiv 6 \pmod{25} \Rightarrow 7^{15} \equiv 13 \pmod{25}$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

(ریاضیات گسسته، مشابه تمارین ۸ و ۹، صفحه ۳۹)

پاسخ سؤال ۱۰: (۰/۷۵ نمره)

$$9^{210} \equiv 81 \pmod{25} \xrightarrow{\text{توان } 20} 9^{400} \equiv 1 \pmod{25} \xrightarrow{\times 9} 9^{410} \equiv 9 \pmod{25}$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

(ریاضیات گسسته، مشابه تمارین ۱۰ و ۱۱، صفحه ۳۹)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱ نمره)

$$\begin{aligned} 5! &= 120 \\ 6! &= 120 \times 6 \\ 7! &= 120 \times 6 \times 7 \\ &\vdots \end{aligned}$$

از ۵! به بعد همه بر ۱۲۰ بخش پذیر هستند.

$$\Rightarrow A \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \pmod{120} \Rightarrow A \equiv 1 + 2 + 6 + 24 \pmod{120} \Rightarrow A \equiv 33 \pmod{120}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۳۹)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱/۲۵ نمره)

اختلاف دو روز جمعه و سه شنبه مورد نظر، حداقل ۴ روز است. بنابراین:

(نمره ۰/۲۵)

$$m \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow m = 7k + 4 \Rightarrow 10 \leq m \leq 99 \Rightarrow 10 \leq 7k + 4 \leq 99 \Rightarrow \frac{6}{7} \leq k \leq \frac{95}{7}$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

$$\Rightarrow k = 1, 2, \dots, 13 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد} = 13$$

(ریاضیات گسسته، تمرین ۱۶، صفحه ۳۰)

پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۵ نمره)

$$5x - 7 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 5x \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow 5x \equiv 7 + 3 \times 11 \pmod{11} \equiv 40 \pmod{11}$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۵)

$$\xrightarrow{\div 5} \frac{5}{(5, 11)=1} x \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow x = 11k + 8 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

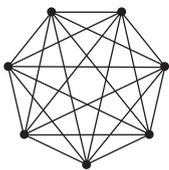
$$\text{(نمره ۰/۲۵)}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۳۵)

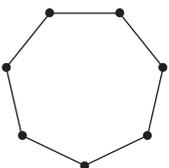


پاسخ سؤال ۱۴: (هر مورد ۰/۵ نمره)

الف) گراف کامل k_7 $\Leftrightarrow k = 6 \Leftrightarrow k = 6$ - منتظم مرتبه ۷



ب) گراف ۲ - منتظم مرتبه ۷ $k = 2 \Leftrightarrow k = 2$



(ریاضیات گسسته، تمرین ۱۵، صفحه ۴۲)

پاسخ سؤال ۱۵: (۰/۷۵ نمره)

در گراف کامل $q = \frac{p(p-1)}{2}$ پس داریم:

$$\frac{p(p-1)}{2} = p + 9 \Rightarrow p^2 - p = 2p + 18 \Rightarrow p^2 - 3p - 18 = 0 \Rightarrow (p+3)(p-6) = 0 \Rightarrow p = 6$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۳۸)

پاسخ سؤال ۱۶: (۱/۵ نمره)

$$q_{k_{10}} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

$$45 - 41 = 4$$

$$\text{اگر } 4 \text{ یال را این گونه برداریم} \Rightarrow \overbrace{14, 14, \dots, 14}^{7} + \overbrace{13, 13, \dots, 13}^{8} \Rightarrow \frac{(7 \times 14) + (8 \times 13)}{2} = \frac{98 + 104}{2} = \frac{202}{2} = 101$$



$$\text{اگر } 4 \text{ یال را مثلاً این گونه برداریم} \Rightarrow \overbrace{14, 14, \dots, 14}^{11} + \overbrace{12, 12, 12, 12}^{4} \Rightarrow \frac{(11 \times 14) + (4 \times 12)}{2} = \frac{154 + 48}{2} = \frac{202}{2} = 101$$



حداقل ۷ و حداکثر ۱۱ رأس از درجه ۱۴ دارد.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۳۷)

پاسخ سؤال ۱۷: (۱/۲۵ نمره)

$$\binom{9}{4} \frac{(4-1)!}{2} = \frac{9!}{4!5!} \times \frac{3!}{2} = \frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{4!} \times 3 = 126 \times 3 = 378$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۴۲)



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

$$ac \equiv bc \pmod{m}, (m, c) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

(ج) نادرست

(ب) نادرست

(الف) نادرست

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۱، ۲۲، ۳۷ و ۴۰)

پاسخ سؤال ۲: (۱/۵ نمره)

(الف) درست است. با توجه به فرد بودن عدد ab نتیجه می گیریم هر دو عدد a و b فرد هستند، پس می توان با فرض صحیح بودن اعداد m و n نوشت:

$$b = 2m - 1, a = 2n - 1$$

بنابراین:

$$a^2 + b^2 = (2n - 1)^2 + (2m - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4m^2 - 4m + 1 = 2(2n^2 - 2n + 2m^2 - 2m + 1)$$

(نمره ۰/۲۵)

(نمره ۰/۲۵)

(نمره ۰/۲۵)

(نمره ۰/۲۵)

(ب) نادرست است.

$$6 | 2 + 4 \not\Rightarrow 6 | 2 \text{ یا } 6 | 4 \text{ (نمره ۰/۵)}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۳، ۵ و ۱۱)

پاسخ سؤال ۳: (۱ نمره)

$$a = 2n \Rightarrow ab + 1 = 2n(2n + 2) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۳)

پاسخ سؤال ۴: (۱ نمره)

یکی از اعداد n و $n + 1$ زوج و دیگری فرد است.

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \text{زوج} \Rightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \text{زوج} \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 2k \Rightarrow n(n+1) = 4k \Rightarrow 3 \text{ یا } 4 \text{ بر } n \text{ باقیمانده}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۵)

پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

فرض کنیم $b + y$ گنگ نیست، پس گویا است.

$$b + y = c \Rightarrow y = c - b = \overset{\text{گویا}}{\uparrow} \Rightarrow y = \text{گویا} - \text{گویا} \Rightarrow y = \text{گویا}$$

از این تناقض نتیجه می گیریم فرض $b + y$ گنگ نیست، غلط است.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۵)

پاسخ سؤال ۶: (۱ نمره)

$$4x^2 + 9y^2 \geq -2 - 4x + 6y \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 + 9y^2 - 6y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 + (3y - 1)^2 \geq 0$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۸)

پاسخ سؤال ۷: (۲۵/۰ نمره)

$$a | \Delta k + 9 \xrightarrow{\times 8} a | 40k + 72 \text{ (نمره ۰/۲۵)} \xrightarrow{-} a | 7 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = 7$$

$$a | 8k + 13 \xrightarrow{\times 5} a | 40k + 65 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

(نمره ۰/۲۵)

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۲)

پاسخ سؤال ۸: (۱ نمره)

(الف) $m^2 | m^4$ پس $m^2 | m^3$ و $(m^3, m^4) = m^2$

$$[m^5, (m^3, m^4)] = m^5 \text{ (نمره ۰/۵)}$$

(ب)

$$(144, 60) = 12, [12, 63] = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252 \text{ (نمره ۰/۵)}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۷)



پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{\frac{(m, n) = d}{d \mid m}} d \mid a - b \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow n \mid b - c \xrightarrow{\frac{(m, n) = d}{d \mid n}} d \mid b - c \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow d \mid (a - b) + (-c + b) \Rightarrow d \mid a - c \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow a \equiv c \pmod{d} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۹)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱/۲۵ نمره)

عدد n رقمی $A = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0$ را بسط می‌دهیم و در هم‌نهدستی به پیمانه ۹ به جای هر توان عدد ۱ قرار می‌دهیم. $(1 \equiv 1 \pmod{9})$ (نمره ۰/۲۵)

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0 \equiv a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{9} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۲)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۵ نمره)

$$2^6 \equiv 64 \equiv 1 \pmod{7} \xrightarrow{\text{توان } 2} 2^{12} \equiv 1 \pmod{7} \xrightarrow{\times 2^r} 2^{12+2r} \equiv 1 \pmod{7} \xrightarrow{+9} 2^{12+2r+9} \equiv 1 \pmod{7} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$2^{12+2r+9} \equiv 1 \pmod{7} \xrightarrow{\times 7} 7 \times (2^{12+2r+9}) \equiv 7 \pmod{7} \Rightarrow 2^{12+2r+9} \equiv 2 \pmod{7} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

پس $r = 2$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۹)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱/۵ نمره)

$$2! + 3! + \dots + 5! \equiv 2 + 6 + 24 + \dots + 0 \equiv 2 \pmod{5} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

می‌دانیم $n! \equiv 0 \pmod{5}$ (پس: $n \geq 5$) (نمره ۰/۲۵)

$$\Rightarrow 6x \equiv 2 \pmod{5} \xrightarrow{+2} 3x \equiv 1 \pmod{5} \xrightarrow{+3} x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x = 2 + 5q \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

اگر $x, 2$ رقمی باشد، q مقادیر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ را اختیار می‌کند. پس ۱۸ مقدار به دست می‌آید. (نمره ۰/۲۵)

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۹)

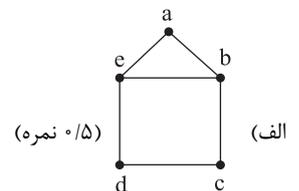
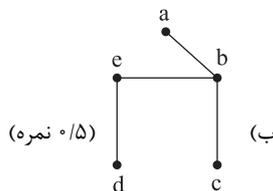
پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۵ نمره)

$$7x + 25y = 30 \Rightarrow 25y \equiv 30 \pmod{7} \Rightarrow 5y \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow -2y \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow y \equiv -3 \pmod{7} \Rightarrow y \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow y = 7k + 4$$

$$\Rightarrow 7x + 25(7k + 4) = 30 \Rightarrow 7x + 25 \times 7k + 100 = 30 \Rightarrow 7x = -25 \times 7k - 70 \Rightarrow x = -25k - 10$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۷)

پاسخ سؤال ۱۴: (۱ نمره)



(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۳۴ و ۳۷)



پاسخ سؤال ۱۵: (۱/۵ نمره)

درجه هر رأس گراف G برابر ۳ است. $\Rightarrow |N_G(v_i)| = 3 \Rightarrow \forall v_i \in V(G)$
(نمره ۰/۲۵)

گراف G ، ۳-منتظم مرتبه ۶ بوده و داریم:

$$p \times r = 2q \Rightarrow 6 \times 3 = 2q \Rightarrow q(G) = 9$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

از طرفی می‌دانیم برای هر رأس دلخواه مانند v_i داریم:

$$\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(a) = p - 1 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow 3 + \deg_{\bar{G}}(a) = 6 - 1 = 5 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(a) = 2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

چون گراف G منتظم است پس گراف \bar{G} نیز منتظم بوده و $\Delta(\bar{G}) = \delta(\bar{G}) = 2$ و در نتیجه:

$$q(G) + \Delta(\bar{G}) = 9 + 2 = 11 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

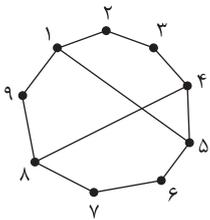
(ریاضیات گسسته، صفحه های ۳۵ و ۳۷)

پاسخ سؤال ۱۶: (۱ نمره)

$$\overset{a}{\textcircled{1}} - \textcircled{5} - \textcircled{4} - \overset{b}{\textcircled{1}} = 20$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۳۸)

پاسخ سؤال ۱۷: (۱ نمره)



(ریاضیات گسسته، صفحه ۴۲)



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(د) درست

(ج) نادرست

(ب) نادرست

(الف) درست

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۳، ۷، ۸ و ۳۷)

پاسخ سؤال ۲: (۱۵/۰ نمره)

(الف) ۱۴ (۵/۰ نمره)

$p = 7$ پس $16 \leq r \leq 0$ می‌باشد. چون p فرد است، پس حتماً r زوج است. $0, 2, 4, 6, 8$ اگر $r = 6$ باشد گراف کامل است که طبق فرض قابل قبول نمی‌باشد. برای

$$2q = rp \Rightarrow 2q = 4 \times 7 \Rightarrow q = 14$$

حداکثر یال باید $r = 4$ باشد.

(ب) ۶ (۵/۰ نمره)

$$15a \equiv 20b \pmod{5} \rightarrow 3a \equiv 4b \pmod{5} \Rightarrow 3a \equiv -b \pmod{5}$$

(۵، ۳۰) = ۵

(ج) مربع کامل (۵/۰ نمره)

$$k = n(n+1)$$

$$4k + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 = \text{مربع کامل}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۳، ۲۲ و ۴۲)

پاسخ سؤال ۳: (۱ نمره)

(الف) $a = 6, b = 4, c = 9$ (۷۵/۰ نمره)(ب) $n = 3$ (۲۵/۰ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲، ۳، ۱۱ و ۱۲)

پاسخ سؤال ۴: (۲۵/۰ نمره)

(الف) با استفاده از روش در نظر گرفتن همه حالت‌ها داریم: (۲۵/۰ نمره)

$$n = 2k \Rightarrow 2(2k)^2 - (2k) + 11 = 12k^2 - 2k + 10 + 1 = 2(6k^2 - k + 5) + 1 = 2q + 1 \quad (\text{نمره } 25/0)$$

$$n = 2k + 1 \Rightarrow 2(2k+1)^2 - (2k+1) + 11 = 12k^2 + 10k + 12 + 1 = 2(6k^2 + 5k + 6) + 1 = 2q' + 1 \quad (\text{نمره } 25/0)$$

با توجه به اینکه عبارت $3n^2 - n + 11$ به ازای هر n طبیعی زوج و فرد، عددی فرد است، پس به ازای هر عدد طبیعی n ، حاصل عددی فرد است.

(ب) با توجه به روش اثبات بازگشتی داریم:

$$x^2 + y^2 + 3 \geq 2x + y + xy \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 6 \geq 4x + 2y + 2xy \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-2)^2 + (y-1)^2 + 1 \geq 0 \quad (\text{نمره } 25/0)$$

با توجه به بدیهی بودن رابطه فوق و برگشت پذیر بودن مراحل طی شده، نامساوی مورد نظر برای هر سه عدد حقیقی X و Y و Z برقرار است.

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۴، ۶ و ۷)

پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

$$\alpha + 2\beta = \frac{\alpha + \beta}{\text{گویا}} + \frac{\beta}{\text{گنگ}} \quad (\text{نمره } 5/0)$$

می‌دانیم جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عدد گنگ می‌باشد (۵/۰ نمره) پس $\alpha + 2\beta$ گنگ است.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۸)

پاسخ سؤال ۶: (۱ نمره)

$$\left. \begin{array}{l} a | b \Rightarrow b = aq \\ b | c \Rightarrow c = bk \end{array} \right\} \Rightarrow c = (aq)k \Rightarrow c = a(qk) \Rightarrow c = at \Rightarrow a | c \quad (q, k, t \in \mathbb{Z})$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۱)



پاسخ سؤال ۷: (۱/۵ نمره)

$$a = 8q + 3 \xrightarrow{\times 11} 11a = 44(2q) + 33 \xrightarrow{\times (-1)} -11a = 44(-2q) - 33$$

$$a = 11q' + 2 \xrightarrow{\times 4} 4a = 44q' + 8 \xrightarrow{\times 2} 12a = 44(3q') + 24$$

$$a = 44(2q) + 33 \xrightarrow{+} a = 44(2q) - 9 + 44 - 44 \Rightarrow a = 44(2q - 1) + 35$$

پس $r = 35$ است.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۶)

پاسخ سؤال ۸: (۱ نمره)

$$(144, 96) = (144 - 96, 96) = (48, 96) = 48$$

$$[48, 240] = 240$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۸)

پاسخ سؤال ۹: (۱/۲۵ نمره)

از اتحاد $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۰)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱/۵ نمره)

می‌دانیم اگر $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ آنگاه $(a + b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{m}$

با توجه به رابطه بالا داریم:

$$5^{100} - 3^{100} - 4^{100} = 25^{50} - 9^{50} - 16^{50} = (9 + 16)^{50} - 9^{50} - 16^{50}$$

$$(9 + 16)^{50} \equiv 9^{50} + 16^{50} \pmod{25} \Rightarrow 25^{50} - 9^{50} - 16^{50} \equiv 0 \pmod{25}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۹)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱ نمره)

اختلاف روزهای دوشنبه و پنجشنبه برابر ۳ روز است. (۱/۲۵ نمره) پس اگر اختلاف روزهای تولد را x در نظر بگیریم داریم:

$$x \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k + 3 \pmod{7}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۴)

بزرگ‌ترین مقدار دورقمی به شکل $7k + 3$ به ازای $k = 13$ برابر ۹۴ است. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱/۵ نمره)

تعداد کیسه‌های ۳ کیلویی را x و تعداد کیسه‌های ۵ کیلویی را y در نظر می‌گیریم، بنابراین خواهیم داشت:

$$3x + 5y = 87 \Rightarrow 5y \equiv 87 \pmod{3} \Rightarrow 2y \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow y \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow y = 3k$$

$$\Rightarrow 3x + 5(3k) = 87 \Rightarrow x = \frac{87 - 15k}{3} \Rightarrow x = 29 - 5k$$

x و y تعداد کیسه‌ها هستند، پس $x \geq 0$ و $y \geq 0$ در نتیجه:

$$\begin{cases} 3k \geq 0 \\ -5k + 29 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{29}{5} \Rightarrow 0 \leq k \leq 5$$

$$x + y = 3k + (-5k + 29) = -2k + 29$$

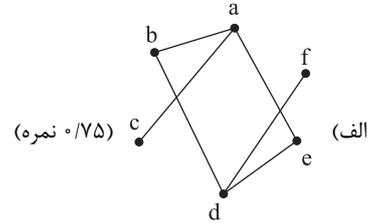
برای آنکه مجموع تعداد کیسه‌ها حداقل شود بایستی k حداکثر مقدار ممکن را داشته باشد، پس $k = 5$ بوده و کمترین تعداد کل کیسه‌ها برابر است با:

$$-2(5) + 29 = 19$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)



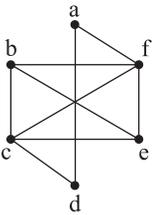
پاسخ سؤال ۱۳: (۲ نمره)



(الف) (نمره ۰/۷۵)

(ب) ac , df
(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

(ج)

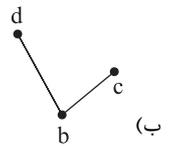
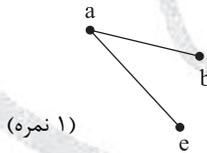


(نمره ۰/۷۵) $N_{\overline{G}}[e] - N_G(a) = \{f, b, c, e\} - \{b, c, e\} = \{f\}$

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۳۵، ۳۶، ۳۷ و ۳۹)

پاسخ سؤال ۱۴: (۲/۲۵ نمره)

(الف) ab , $aedb$, $afedb$ (نمره ۰/۷۵)



(ج) $afedba$ (نمره ۰/۵)

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۳۷ و ۳۸)



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(الف) نادرست، چون $2^3 + 1$ به ۶۴۱ بخش پذیر است.

(ب) درست، چون $3m+1$ و $3m+2$ دو عدد متوالی هستند، پس $(3m+1, 3m+2) = 1$ است.

(ج) نادرست، طبق قضیه صفحه ۲۵ کتاب درسی، چون $(21, 35) = 7 \nmid 13$ پس معادله $21x \equiv 13 \pmod{35}$ در \mathbb{Z} جواب ندارد.

(د) درست، طبق فعالیت صفحه ۳۹ کتاب درسی، مجموع درجات گراف ۲۹ می باشد. پس:

$$\sum_{i=1}^p \deg(V_i) = 2q \Rightarrow r+r+\dots+r = 2q \Rightarrow pr = 2q$$

چون $2 \nmid p$ زوج است. اگر p فرد باشد، حتماً $2 \mid r$ زوج است.

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۲، ۱۷، ۲۵ و ۳۹)

پاسخ سؤال ۲: (۱/۵ نمره)

(الف)

$$\forall m > 0; a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(ب) نسبت به هم اول (۲۵/۰ نمره)

(ج) باقی مانده ۵ و خارج قسمت ۲۳ - (۵/۰ نمره)

(د)

$$\frac{7 \times 6}{2} = 21 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۱۳، ۱۴ و ۳۸)

پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)

حالت اول: a و b هر دو زوج: در این حالت ab زوج است. پس A هم زوج می شود. (۵/۰ نمره)

حالت دوم: a و b هر دو فرد: در این حالت $a-b$ زوج است. پس A هم زوج می شود. (۵/۰ نمره)

حالت سوم: یکی از مقادیر a و b زوج و یکی فرد: در این حالت ab زوج است. پس A هم زوج است. (۵/۰ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه ۴)

پاسخ سؤال ۴: (۱/۵ نمره)

اثبات را به کمک برهان خلف انجام می دهیم. فرض می کنیم عبارت $(a_1 + b_1)(a_2 + 3b_2)(a_3 + 5b_3)$ زوج نبوده و عددی فرد باشد، (۲۵/۰ نمره) در این صورت با توجه به اینکه حاصل ضرب آنها عددی فرد است، بنابراین هر یک از این عبارتها نیز فرد می باشد (۲۵/۰ نمره). پس داریم:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 2k + 1 \\ a_2 + 3b_2 = 2k' + 1 \\ a_3 + 5b_3 = 2k'' + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع طرفین تساویها}} (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) + 2b_2 + 4b_3 = 2(k + k' + k'' + 1) + 1 = 2q + 1$$

$$\xrightarrow{\text{نمره } 0/25} a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = m \Rightarrow 2m + 2b_2 + 4b_3 = 2q + 1 \Rightarrow \underbrace{2(m + b_2 + 2b_3)}_{\text{زوج}} = \underbrace{2q + 1}_{\text{فرد}}$$

با توجه به اینکه هیچ دو عددی زوج و فردی با هم برابر نیستند، پس به تناقض رسیده و نتیجه می گیریم فرض فرد بودن عبارت مورد نظر غلط بوده و در نتیجه عبارت مورد نظر زوج است. (۲۵/۰ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۵ و ۶)

پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 + 1 \geq 2x - 2y \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 \geq 0$$

(نمره ۲۵/۰)

(نمره ۲۵/۰)

به روش بازگشتی اثبات می کنیم.

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 \geq 0 \quad (\text{نمره } 0/25) \quad \text{عبارت بدیهی و درست}$$

(نمره ۲۵/۰)

چون تمام مراحل برگشت پذیر است، پس حکم برقرار می باشد.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۸)

پاسخ سؤال ۶: (۱ نمره)

$$\left. \begin{aligned} a \mid 2m^2 + 1 \xrightarrow{x-2} a \mid -6m^2 - 3 \quad (\text{نمره } 0/25) \\ a \mid 6m^2 + 1 \Rightarrow a \mid 6m^2 + 1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} a \mid -6m^2 - 3 + 6m^2 + 1 \Rightarrow a \mid -2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\xrightarrow{a \geq 0, a \in \mathbb{Z}} a = 1, 2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

چون $2m^2 + 1$ عدد فرد است (۲۵/۰ نمره) پس به ۲ بخش پذیر نمی باشد و $a = 1$ قابل قبول است.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۱)



پاسخ سؤال ۷: (۱ نمره)

$$(6m + 5, 11m + 9) = d$$

$$\left. \begin{aligned} d \mid 6m + 5 &\Rightarrow d \mid 66m + 55 \text{ (نمره } \frac{1}{25}) \\ d \mid 11m + 9 &\Rightarrow d \mid 66m + 54 \text{ (نمره } \frac{1}{25}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1 \text{ (نمره } \frac{1}{25})$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۳)

پاسخ سؤال ۸: (۱/۵ نمره)

$$\left. \begin{aligned} m = 19q + 11 \text{ (نمره } \frac{1}{25}) \\ n = 19k + 7 \text{ (نمره } \frac{1}{25}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3m - 7n = 3(19q + 11) - 7(19k + 7) \Rightarrow 3m - 7n = 19(3q) + 33 - 19(7k) - 49$$

$$= 19(3q - 7k) - 16 = 19t - 16 = 19t - 16 + 19 - 19 = 19(t - 1) + 3 \Rightarrow t = 3 \text{ (نمره } \frac{1}{25})$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۴)

پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

$$3^4 \equiv -1 \pmod{100} \Rightarrow (3^4)^{100} \equiv (-1)^{100} \pmod{100} \Rightarrow 3^{400} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 3^{402} \equiv 9 \pmod{100} \Rightarrow 7 \times 3^{402} \equiv 63 \pmod{100} \Rightarrow 7 \times 3^{402} + 19 \equiv 82 \pmod{100}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۹)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱ نمره)

ابتدا محاسبه می‌کنیم که از اول مهر تا ۱۷ اسفند چند روز فاصله است. باقیمانده آن را به ۷ محاسبه می‌کنیم. پس کافی است ۵ روز به جلو حرکت کنیم که به سه‌شنبه می‌رسیم. (۵/۵ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۴)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۵ نمره)

$$a^2 a^3 a \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow a^{-3} + a^{-2} + a \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 3a \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow a = 2 \text{ (نمره } \frac{1}{25})$$

$$aa^2 \equiv a + a + 2 + 5 \equiv 2a + 7 \equiv 2(2) + 7 \equiv 11 \equiv 0 \pmod{11}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۳)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱/۵ نمره)

$$17x + 14y = 1000 \Rightarrow 17x \equiv 1000 - 14y \pmod{17} \Rightarrow 3x \equiv 6 \pmod{17} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{17} \Rightarrow x = 2 + 17t \text{ (نمره } \frac{1}{25})$$

$$17x + 14y = 1000 \Rightarrow 17(2 + 17t) + 14y = 1000 \Rightarrow y = 69 - 17t \text{ (نمره } \frac{1}{25})$$

حال مقدار x را جایگزین و y را محاسبه می‌کنیم. x بزرگ‌ترین عدد دورقمی است پس $t = 6$ و $x = 86$ و $y = -33$ می‌باشد. (۲۵/۵ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۶ و ۲۷)

پاسخ سؤال ۱۳: (۳ نمره)

الف) $N_G(e) = \{f, d, i\}$ (۵/۵ نمره)
 ب) $deihcd$ (۵/۵ نمره)
 ج) $biedchg$ (۵/۵ نمره)

$$p = 9, q(G) = 10 \Rightarrow q(\bar{G}) = \binom{9}{2} - 10 = 26 \text{ (نمره } \frac{1}{5})$$

$$\delta(G) + \Delta(\bar{G}) = p - 1$$

$$1 + \Delta(\bar{G}) = 9 - 1 \Rightarrow \Delta(\bar{G}) = 7 \text{ (نمره } \frac{1}{5})$$

و) ce (۵/۵ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۳۶، ۳۷ و ۳۸)

پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۵ نمره)

$$\left\{ \begin{aligned} q &= \frac{pr}{2} \text{ (نمره } \frac{1}{25}) \\ q &= 2p + 9 \text{ (نمره } \frac{1}{25}) \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{6p}{2} = 2p + 9 \Rightarrow p = 9 \Rightarrow q = 27$$

$$\left\{ \begin{aligned} q(G) &= 27 \\ q(k_4) &= \frac{9 \times 8}{2} = 36 \text{ (نمره } \frac{1}{25}) \end{aligned} \right. \Rightarrow 36 - 27 = 9 \text{ (نمره } \frac{1}{25})$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۳۵ و ۳۸)



پاسخنامه پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۳

پاسخنامه درس: ریاضیات گسسته (سری ۲)

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۵/۵ نمره)

الف) نادرست، مثال نقض این گزاره عدد گویای صفر است که در هر عدد گنگ ضرب شود، حال صفر و گویا است.

ب) نادرست، اگر $b = 0$ باشد، رابطه برقرار نیست.ج) درست، کافی است عدد را به پیمانۀ 10^5 ببریم و خواهیم داشت: $3^5 + 5! \equiv 2^5 + 0 \equiv 2 \pmod{10^5}$ د) درست، چنین گرافی، گراف کامل است. گراف کامل از مرتبۀ ۵، همواره $\binom{5}{2} = 10$ یال دارد.

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۵، ۱۱، ۳۲ و ۳۸)

پاسخ سؤال ۲: (۱/۵ نمره)

از XY فاکتور می گیریم و X و Y را بر حسب بخش پذیری بر ۳ حالت بندی می کنیم:

$$XY(y^2 - x^2) = \begin{cases} (1) & \text{نمره } 0/5 \text{ (نمره } 0/5) \text{ بر } XY \text{ بخش پذیر و در نتیجه کل عبارت هم عامل } 3 \text{ دارد و بر } 3 \text{ بخش پذیر است. } \Rightarrow X \text{ یا } Y \text{ حداقل یکی مضرب } 3 \text{ باشد} \\ (2) & \text{نمره } 0/5 \text{ (نمره } 0/5) \text{ } \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3k + 1 \\ y^2 = 3k' + 1 \end{cases} \text{ و } X \text{ و } Y \text{ هیچ کدام بر } 3 \text{ بخش پذیر نباشند} \end{cases}$$

و در نتیجه عبارت داده شده مضرب ۳ است.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۴)

پاسخ سؤال ۳: (۱ نمره)

(۵/۵ نمره)

(۲۵/۵ نمره)

(۲۵/۵ نمره)

فرض می کنیم $5\alpha - \beta$ گویا باشد. از فرض سؤال هم داریم $\alpha + \beta$ گویا است. می دانیم جمع دو عدد گویا، گویا است. در نتیجه $6\alpha - \beta + \alpha + \beta = 6\alpha$ گویا و در نتیجه α گویا است که خلاف فرض سؤال است. بنابراین فرض خلف نادرست و حکم اثبات می شود.

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۵ و ۸)

پاسخ سؤال ۴: (۱/۵ نمره)

$$a \mid 6m + 3 \xrightarrow{\times 4} a \mid 24m + 12 \text{ (نمره } 0/5)$$

$$a \mid 8m + 5 \xrightarrow{\times 3} a \mid 24m + 15 \text{ (نمره } 0/5)$$

$$a \mid 3 \Rightarrow a = \pm 1, \pm 3 \text{ (نمره } 0/5)$$

چهار مقدار

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۱)

پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

$$a = 3q + 2 \xrightarrow{\times 2} 2a = 6q + 4 \xrightarrow{-5} 2a - 5 = 6q - 1 \text{ (نمره } 0/25)$$

$$q \in \mathbb{Z} \begin{cases} q = 2t \Rightarrow 2a - 5 = 12t - 1 = 12t' + 11 \\ q = 2t + 1 \Rightarrow 2a - 5 = 12t + 5 \end{cases}$$

باقیمانده می تواند ۵ یا ۱۱ باشد. (۲۵/۵ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۱۴ و ۱۵)

پاسخ سؤال ۶: (۱/۵ نمره)

$$5 \mid 3n + 1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 2} 25 \mid 9n^2 + 6n + 1 \text{ (نمره } 0/5)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین } 5 \times} 25 \mid 15n + 5 \text{ (نمره } 0/5)$$

$$\text{طرف راست را جمع می کنیم} \quad 25 \mid 9n^2 + 21n + 6 \text{ (نمره } 0/5)$$

$$\xrightarrow{\times 2} 25 \mid 30n + 10 \text{ (نمره } 0/5)$$

$$\underline{\hspace{1.5cm}} \quad 25 \mid 9n^2 + 51n + 16$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۶)



پاسخ سؤال ۷: (۱/۵ نمره)

باتوجه به قضیه تقسیم می‌توانیم دو رابطه زیر را در نظر بگیریم:

$$a = 7q + 5 \xrightarrow{\times 5} 5a = 35q + 25$$

$$a = 5q' + 3 \xrightarrow{\times 7} 7a = 35q' + 21 \quad (\text{نمره } 0/75)$$

$$2a = 35q'' - 4$$

طرفین دو رابطه را از هم کم می‌کنیم، با توجه به زوج بودن سمت چپ رابطه، q'' هم باید زوج باشد و در نتیجه $q'' = 2t$ است.

$$2a = 7 \cdot 2t - 4 \Rightarrow a = 7t - 2 = 7t' + 23 \quad (\text{نمره } 0/75)$$

باقیمانده عدد ۳۳ است.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۶)

پاسخ سؤال ۸: (هر مورد ۰/۵ نمره)

الف) $[8m^3, 4|m|] = 8|m|^3$ (الف)

ب) $m = 3, 2 \cdot x \equiv 3 \cdot y \pmod{10} \xrightarrow{(10, 15)=5} 2x \equiv 3y$

ج) $+3 - 4 + 7 - 2 + 5 - 1 \equiv 8$

د) گراف ۴- منتظم بیشترین یال را دارد و $q = \frac{4 \times 7}{2} = 14$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۱۳، ۲۲، ۳۲ و ۳۵)

پاسخ سؤال ۹: (۱ نمره)

ابتدا فاصله دو تاریخ را از هم به دست می‌آوریم:

$$6 \times 31 + 1 \rightarrow 1 \text{ مهر}$$

$$1 \rightarrow 1 \text{ فروردین} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$6 \times 31 \equiv 4 \pmod{3}$$

۴ روز به عقب بر می‌گردیم و ۱ فروردین پنج‌شنبه است. پس اولین جمعه ۲ فروردین و در نتیجه سومین جمعه $16 = 7 + 7 + 2$ ، ۱۶ فروردین ماه است.

(۰/۵ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۴)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱/۵ نمره)

$$(a^2 - 1)x \equiv 16 \pmod{16} \Rightarrow (a^2 - 1, 3) | 16 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\begin{cases} a = 3k \Rightarrow a^2 - 1 = 3k^2 - 1 \\ a = 3k + 1 \Rightarrow a^2 - 1 = 3k^2 \\ a = 3k + 2 \Rightarrow a^2 - 1 = 3k^2 \end{cases}$$

$$\text{غ ق ق}$$

$$\text{غ ق ق}$$

در نتیجه باید $a^2 - 1 = 3k^2 - 1$ باشد، تا معادله جواب داشته باشد.

$$(3k^2 - 1)x \equiv 16 \pmod{16} \Rightarrow x \equiv -1 \pmod{16} \Rightarrow x = 3k - 1 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$10 \leq 3k - 1 \leq 99$$

$$11 \leq 3k \leq 100$$

$$4 \leq k \leq 33 \Rightarrow \text{تعداد } 33 - 4 + 1 = 30 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۵)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱ نمره)

$$24x + 18y = 6000 \xrightarrow{\div 6} 4x + 3y = 1000 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$4x \equiv 1000 - 3y \pmod{4} \Rightarrow x = 3k + 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq 0 \quad (1) \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$4(3k + 1) + 3y = 1000 \Rightarrow 3y = -12k + 996 \Rightarrow y = -4k + 332 \geq 0 \Rightarrow k \leq 83 \quad (2) \quad (\text{نمره } 0/25)$$

از (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت که به ۸۴ حالت می‌توان این کار را انجام داد. (۰/۲۵ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)



پاسخ سؤال ۱۲: (۱/۵ نمره)

الف) از گراف کامل مرتبه ۷ که $\binom{7}{2} = 21$ یال دارد باید ۲ یال را به گونه‌ای حذف کنیم که تعداد رئوس δ بیشترین تعداد باشد. اگر ۲ یال را به طور مجزا حذف کنیم، ۴ رأس δ خواهیم داشت. (۱ نمره)

ب) عبارت داده شده $2q + p$ است که برابر $45 = 7 + 2(19)$ است. (۰/۵ نمره)

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۳۵ و ۳۶)

پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۵ نمره)

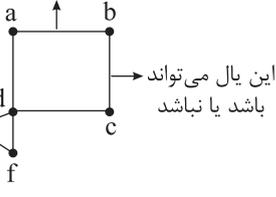
الف) edfcb (۰/۲۵ نمره)

ب) $q(\bar{G}) = \binom{7}{2} - 8 = 14$ (۰/۲۵ نمره)

ج) edfe (۰/۲۵ نمره)

د) $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ (۰/۲۵ نمره)

این یال می‌تواند باشد یا نباشد



این یال می‌تواند باشد یا نباشد

رأس g هم می‌تواند باشد یا نباشد

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۳۷ و ۳۸)

پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۵ نمره)

اگر حداقل درجه گراف برابر k باشد، پس این شرط باید برای تمام رئوس برقرار باشد، در نتیجه اگر از رأس v_1 بررسی گراف را شروع کنیم، v_1 باید حداقل به k رأس دیگر وصل باشد و v_1 مثلاً به رأس v_2 وصل شده است. شرط مینیمم درجه برای v_2 هم برقرار است و چون v_2 به v_1 وصل است باید حداقل به $k-1$ رأس دیگر وصل باشد. مثلاً v_2 به رأسی مانند v_3 وصل است که اگر v_3 به v_1 هم متصل باشد، باید حداقل به $k-2$ رأس دیگر متصل باشد، پس به رأس جدیدی مانند v_4 وصل است و اگر به همین ترتیب پیش برویم اگر رأس v_k به همه v_{k-1} رأس قبلی هم وصل باشد برای برقراری شرط $\delta \geq k$ باید به رأس v_{k+1} ام نیز وصل باشد بنابراین مسیری به طول k به صورت $v_1 v_2 v_3 \dots v_{k+1}$ داریم.

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۴۰ و ۴۲)

سرگروه	گروه طراحی و بازنگاری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران (به ترتیب حروف الفبا)
رضا توکلی	سوگند روشنی - زهرا مبینی	مهديار شريف - ابوالفضل فروغی

واحد فنی (به ترتیب حروف الفبا)

زهرا احدی - امیرعلی الماسی - مبینا بهرامی - معین‌الدین تقی‌زاده - پریا رحیمی - مهرداد شمسی - راضیه صالحی - انسیه مرزبان



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(د) درست

(ج) نادرست

(ب) نادرست

(الف) درست

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲، ۳، ۲۴ و ۳۹)

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

$$(ب) q = 9, \Delta = 2 \Rightarrow q + \Delta = 11$$

(د) ۳

(الف) ۶

(ج) یک

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۱۶، ۱۷ و ۳۸)

پاسخ سؤال ۳: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

$$(ب) m | a, m | b \Rightarrow m \leq d$$

(د) زوج k

(الف) مسیر

(ج) گنگ

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۸، ۱۳، ۳۵ و ۳۹)

پاسخ سؤال ۴: (۱ نمره)

فرض کنید $n \in \mathbb{Z}$ باشد در دو حالت مسئله را بررسی می‌کنیم:

$$(الف) n = 2k \Rightarrow A = n^2 - 7n + 17 = (2k)^2 - 7(2k) + 17 = 4k^2 - 14k + 17 \Rightarrow A = 2(2k^2 - 7k + 8) + 1 = 2q + 1 \Rightarrow A \text{ فرد است.}$$

عدد صحیح

$$(ب) n = 2k + 1 \Rightarrow A = (2k + 1)^2 - 7(2k + 1) + 17 = 4k^2 + 4k + 1 - 14k - 7 + 17$$

 $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow A = 4k^2 - 10k + 11 = 2(2k^2 - 5k + 5) + 1 = 2q + 1 \Rightarrow A \text{ فرد است.}$$

عدد صحیح

(ریاضیات گسسته، صفحه ۴)

پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

$$\left. \begin{array}{l} 11 | 3k - 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 121 | 9k^2 - 6k + 1 \\ 11 | 3k - 1 \xrightarrow{\times 11} 121 | 33k - 11 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 121 | 9k^2 + 27k - 10 \quad (نمره ۵/۵)$$

(نمره ۵/۵)

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۶)

پاسخ سؤال ۶: (۱/۵ نمره)

$$\begin{array}{l} m \equiv 3 \pmod{17} \\ n \equiv 11 \pmod{17} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} mn \equiv 33 \pmod{17} \\ m^3 \equiv 27 \pmod{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2mn \equiv 66 \pmod{17} \\ -m^3 \equiv -27 \pmod{17} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2mn - m^3 \equiv 39 \equiv 39 - 34 \equiv 5 \pmod{17} \Rightarrow r = 5$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۴)

پاسخ سؤال ۷: (۱/۵ نمره)

$$\begin{array}{l} 7^{216} \equiv 49 \pmod{152} \\ 7^{304} \equiv 1 \pmod{152} \end{array} \xrightarrow{\text{توان } 152} 7^{304} \equiv 1 \pmod{152} \Rightarrow 9 \times 7^{304} \equiv 9 \pmod{152} \Rightarrow 9 \times 7^{304} - 100 \equiv -91 \equiv 5 \pmod{152} \Rightarrow r = 5$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۹)

پاسخ سؤال ۸: (۱ نمره)

ابتدا حساب می‌کنیم از اول فروردین تا سوم آبان چند روز می‌شود.

$$30 + 5 \times 31 + 3 + 3 \equiv 2 + 5 \times 3 + 2 + 3 \equiv 1 \pmod{7} \quad (نمره ۷/۵)$$

پس اول فروردین پنجشنبه می‌باشد. (نمره ۲۵/۰)

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۴)



پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

$$\begin{cases} d \mid \Delta n - 1 \xrightarrow{\times 2n} d \mid 1 \cdot n^2 - 2n & \text{(نمره ۰/۵)} \\ d \mid 2n^2 - 3n + 2 \xrightarrow{\times -5} d \mid -1 \cdot n^2 + 15n - 10 & \text{(نمره ۰/۲۵)} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} d \mid 13n - 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \mid 13n - 10 \xrightarrow{\times 5} d \mid 65n - 50 & \text{(نمره ۰/۲۵)} \\ d \mid \Delta n - 1 \xrightarrow{\times -13} d \mid -65n + 13 & \text{(نمره ۰/۲۵)} \end{cases} \Rightarrow d \mid -37 \Rightarrow d \mid 37 \xrightarrow{d \neq 1} d = 37$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۱۷)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱/۵ نمره)

$$\text{معادله جواب دارد} \Rightarrow 2 \mid 1020 \Rightarrow (22, 38) \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

$$\xrightarrow{+2} 19x + 11y = 510 \Rightarrow 19x \equiv 510 \Rightarrow -3x \equiv 510 \equiv 114 \equiv 15$$

$$\xrightarrow{+3} x \equiv -5 \Rightarrow x = -5 + 11t \text{ (نمره ۰/۵)}$$

حال مقدار x را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$19x + 11y = 510 \Rightarrow 19(-5 + 11t) + 11y = 510 \Rightarrow 11y = -19 \times 11t + 605 \Rightarrow y = 55 - 19t \text{ (نمره ۰/۷۵)}$$

$$\text{پس } \begin{cases} x = -5 + 11t \\ y = 55 - 19t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۵ نمره)

$$\text{معادله جواب دارد} \Rightarrow 3 \mid 21 \Rightarrow (15, 24) \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow 24x \equiv 21 \xrightarrow{\div 3} 8x \equiv 7 \Rightarrow -2x \equiv 2 \Rightarrow x \equiv -1 \text{ (نمره ۰/۵)}$$

$$\Rightarrow x = 5q - 1 \xrightarrow{q=21} x = 104 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱ نمره)

$$7a \mid 23 \equiv 0 \Rightarrow 3 - 2 + 1 - a + 7 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 9 \Rightarrow a = 11q + 9 \xrightarrow{0 \leq a \leq 9} a = 9 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه ۲۳)

پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۵ نمره)

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2 \geq 0 \text{ (نمره ۰/۵)}$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 - 2xy^2z + x^2y^2 + x^2z^2 - 2x^2yz + y^2z^2 + x^2z^2 - 2xyz^2 \geq 0 \text{ (نمره ۰/۵)}$$

$$\Leftrightarrow (xy - yz)^2 + (xy - xz)^2 + (yz - xz)^2 \geq 0 \text{ بدیهی است. (نمره ۰/۵)}$$

چون تمام مراحل برگشت پذیر است. پس حکم به روش بازگشتی اثبات شد.

(ریاضیات گسسته، صفحه ۸)



پاسخ سؤال ۱۴: (هر مورد ۵/۵ نمره)

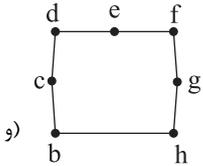
الف) $q(G) = 12$

ب) $N_G[g] = \{g, f, e, b, h\}$

ج) $bgfedhb$

د) $abcdhgf$

ه) $P(G) = 8 \Rightarrow q(\bar{G}) = \binom{8}{2} - 12 = 28 - 12 = 16$



(ریاضیات گسسته، صفحه های ۳۲ و ۴۲)

پاسخ سؤال ۱۵: (۱ نمره)

فرض کنید تعداد رئوس درجه یک، X باشد.

$$4, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_x \text{ (نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow P = 8 + X \text{ (نمره } 0/25), \sum_{i=1}^P \deg(v_i) = 2q \Rightarrow 12 + 9 + 4 + X = 30 \Rightarrow X = 5 \Rightarrow P = 13 \text{ (نمره } 0/25)$$

(ریاضیات گسسته، صفحه های ۳۹ و ۴۰)

سراگروه	گروه طراحی و بازنگری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران (به ترتیب حروف الفبا)
رضا توکلی	رضا توکلی - سوگند روشنی - زهرا مبینی	مهديار شريف - ابوالفضل فروغی

واحد فنی (به ترتیب حروف الفبا)
زهرا احدی - امیرعلی الماسی - مبینا بهرامی - معین الدین تقی زاده - پریا رحیمی - مهرداد شمسی - راضیه صالحی - انسبیه مرزبان