



دفترچه سوال

# هندسه پایه دوازدهم

آرشیو آزمون‌های تشریحی نیمسال اول

دی ماه - ۱۴۰۱ تا ۱۴۰۳



مرکز پژوهش آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۰/۱۲

صفحه ۱ از ۲

باسمه تعالی

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: هندسه

کلاس:

بارم	سؤال	ردیف
۱/۵	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>(الف) اگر <math>A = \begin{bmatrix} -3 &amp; 0 &amp; 0 \\ 5 &amp; 2 &amp; 0 \\ -1 &amp; 6 &amp; 1 \end{bmatrix}</math> باشد، در این صورت <math> A^3 </math> برابر است با .....</p> <p>(ب) فصل مشترک یک صفحه و سطح مخروطی در حالتی که صفحه با مولد موازی باشد و از رأس عبور نکند ..... است.</p> <p>(ج) اگر <math>A = \begin{bmatrix} 4 &amp; 1 \\ 0 &amp; -2 \end{bmatrix}</math> باشد، آنگاه حاصل <math> 3A </math> برابر است با .....</p> <p>(د) اگر در دستگاه <math>\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}</math>، <math>\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}</math> باشد، در این صورت دستگاه ..... جواب دارد.</p> <p>(ه) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، ..... است.</p> <p>(و) اگر <math>A = \begin{bmatrix} 2 &amp; 4 \\ -1 &amp; 3 \end{bmatrix}</math> باشد، دترمینان <math>A^{-1}</math> برابر است با .....</p>	۱
۱/۵	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) یک ماتریس در صورتی وارون پذیر نیست که دترمینان آن مخالف صفر باشد.</p> <p>(ب) دو ماتریس را در صورتی می‌توان در هم ضرب کرد که هم‌مرتبه باشند.</p> <p>(ج) اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو ماتریس باشند و <math>A \times B = \bar{O}</math> یا <math>A = \bar{O}</math> آنگاه <math>A \times B = \bar{O}</math> یا <math>B = \bar{O}</math>.</p> <p>(د) اگر ضرب ماتریس‌های <math>A</math> و <math>B</math> تعویض پذیر باشد، آنگاه <math>(A - B)(A + B) = A^2 - B^2</math>.</p> <p>(ه) اگر دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد آنگاه دستگاه دو معادله و دو مجهول، هیچ جوابی ندارد.</p> <p>(و) معادله <math>x^2 + y^2 + ax + by + c = 0</math> معادله دایره است اگر و فقط اگر <math>a^2 + b^2 &gt; 4c</math> باشد.</p>	۲
۱/۲۵	<p>دو ماتریس <math>A = \begin{bmatrix} 2 &amp; m+1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 3 &amp; 0 \\ n-2 &amp; 0 &amp; -1 \end{bmatrix}</math> و <math>B = \begin{bmatrix} 2 &amp; n &amp; 1 \\ 1 &amp; 0 &amp; -m \\ 3 &amp; -1 &amp; 2 \end{bmatrix}</math> مفروض‌اند. اگر <math>A</math> یک ماتریس قطری باشد، حاصل <math>BA</math> را به دست آورید.</p>	۳
۱/۲۵	<p>اگر <math>A = B</math> و <math>A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 &amp; 3 \\ 0 &amp; -1 \\ 0 &amp; 2 \end{bmatrix}</math> باشد، آنگاه حاصل <math>a + b + c + d</math> را به دست آورید.</p>	۴
۱/۵	<p>اگر ماتریس <math>A</math> را ماتریس ضرایب، <math>X</math> را ماتریس مجهولات و <math>B</math> را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله دو مجهولی <math>\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 4x - y = 3 \end{cases}</math> در نظر بگیریم، از تساوی <math>AX = B</math>، ماتریس <math>X</math> را به دست آورید.</p>	۵



مرکز تحقیق و توسعه آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۰/۱۲

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: هندسه

بارم	سؤال	ردیف
۱	دترمینان ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با درایه‌های $j$ $i > j$ $i = j$ $i < j$ را به دست آورید. $a_{ij} = \begin{cases} j-i & i > j \\ i^2 - 1 & i = j \\ i-2 & i < j \end{cases}$	۶
۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 4 &   & A &   & 3 \\ 1 & & & &   & A &   \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان $A$ را به دست آورید.	۷
۱/۷۵	اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $I_3$ ماتریس همانی $3 \times 3$ باشد، حاصل $ BA^T  +  -2I_3 $ را به دست آورید.	۸
۱	مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع $\sqrt{3}$ که بر خط $d$ در صفحه مماس اند را تعیین کنید.	۹
۱/۵	نقطه $A$ و خط $d$ در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از $A$ به فاصله ۱ سانتی‌متر و از $d$ به فاصله $1/5$ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید با رسم شکل)	۱۰
۱	مرکز و شعاع دایره زیر را تعیین کنید و مشخص کنید دایره از کدام نواحی محورهای مختصات می‌گذرد. $(2x-1)^2 + (2y-3)^2 = 8$	۱۱
۱/۵	معادله دایره‌ای بنویسید که دو خط $3x-y=3$ و $x+y=5$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x-3y=4$ بر آن مماس باشد.	۱۲
۱/۲۵	در نقطه $A(0, -1)$ خطی بر دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ مماس کرده‌ایم. معادله این خط مماس را بنویسید.	۱۳
۱/۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(0, 1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=2$ و تری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.	۱۴
۱/۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(-2, 2)$ بوده و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 + 4y - 2x = -1$ مماس بیرون باشد.	۱۵
۲۰	جمع بارم	



مرکز تحقیق و توسعه روش‌های آموزشی

باسمه تعالی

## پیش‌آزمون تشریحی هماهنگ دی‌ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۱

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: هندسه (سری ۱)

ردیف	سؤال	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) هر ماتریس قطری وارون‌پذیر است. ب) مقطع صفحه شامل محور یک سطح مخروطی دو خط متقاطع است. ج) دایره $(x-R)^2 + (y+R)^2 = R^2$ در ناحیه دوم بر محورهای مختصات مماس است. د) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس $A^{-1}$ برابر $-\frac{1}{5}$ است.	۱
۲	ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ مفروض است. اگر $a_{ij} = \begin{cases} 2i + 3j & i \geq j \\ i^2 + j^2 & i < j \end{cases}$ ، ماتریس $A$ را مشخص کنید.	۱
۳	اگر $2A - 3I = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2m & 4 \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس $A$ برابر ۱۰ باشد، $m$ را بیابید.	۱/۲۵
۴	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل ماتریس $2A^{10} + A^{15}$ را به دست آورید.	۱/۵
۵	در تساوی ماتریسی $A \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس $A$ را به دست آورید.	۱/۵
۶	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases}$	۱/۵
۷	اگر ماتریس $A$ یک ماتریس $2 \times 2$ باشد، به طوری که $ A  = 3$ . مطلوب است $ -A $ .	۱
۸	اگر $A = \begin{bmatrix} - A  & -5 \\  A  & 4 A  \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس $A + I$ را پیدا کنید. ( $ A  > 0$ )	۱/۷۵
۹	نقاط $A, B, C$ و $D$ در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله و از $C$ و $D$ نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید).	۱/۵



مرکز پیشرفته آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

## پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۱

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۲ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: هندسه (سری ۱)

بارم	سؤال	ردیف
۱	مساحت مقطع مخروطی $z = 2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ را به دست آورید.	۱۰
۱	حدود $a$ را طوری بیابید که $x^2 + y^2 + 2x - 5y - a = 0$ معادله یک دایره باشد.	۱۱
۱	معادله دایره‌ای به مرکز $(-2, 1)$ را بنویسید که بر خط $3y - 4x = 0$ مماس باشد.	۱۲
۱/۲۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(-1, 5)$ و $B(3, -7)$ دو سر قطری از آن باشند.	۱۳
۱/۲۵	طول وتری که دایره به معادله $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ روی خط به معادله $2x - y = 8$ جدا می‌کند، چقدر است؟	۱۴
۱	وضعیت نقطه $A(-2, 3)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ را مشخص کنید.	۱۵
۱/۵	وضعیت دایره $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ با دایره‌ای به مرکز $(-1, 1)$ و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.	۱۶
۲۰	جمع بارم	



مرکز تحقیق و آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

### پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۱

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: هندسه (سری ۲)

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) ماتریس مربعی <math>A</math> وارون پذیر است، هرگاه ..... مخالف صفر باشد.</p> <p>ب) اگر ماتریس <math>A = \begin{bmatrix} -۳ &amp; m &amp; ۰ \\ n &amp; x &amp; m \\ a &amp; b &amp; c \end{bmatrix}</math> اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس <math>A</math> برابر ..... است.</p> <p>ج) اگر صفحه <math>P</math> عمود بر محور <math>\Delta</math> باشد و از رأس سطح مخروطی عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه <math>P</math> و سطح مخروطی یک ..... است.</p> <p>د) اگر معادله <math>ax^2 + 2y^2 + 4x - 2y = 1</math> معادله دایره باشد، آنگاه <math>a</math> برابر ..... است.</p>	۱
۱/۵	<p>اگر <math>A = [a_{ij}]_{3 \times 3}</math> و <math>B = [b_{ij}]_{3 \times 3}</math> دو ماتریس با شرایط زیر باشند، مطلوب است <math>2A - B + 3I</math>.</p> $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & i < j \\ 2i - 1 & i = j \\ j^2 - 1 & i > j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij} = \min\{i, j\}$ <p>(منظور از <math>\min\{i, j\}</math> کوچک ترین عدد از بین <math>i</math> و <math>j</math> است؛ به عنوان مثال: <math>\min\{3, 3\} = 3</math> , <math>\min\{1, 2\} = 1</math>)</p>	۲
۱/۷۵	<p>اگر <math>A = \begin{bmatrix} ۰ &amp; -۲ \\ ۱ &amp; -۳ \end{bmatrix}</math> باشد، مقادیر <math>m</math> و <math>n</math> را طوری بیابید که رابطه <math>A^2 = mA + nI_2</math> برقرار باشد. (<math>I_2</math> ماتریس همانی است.)</p>	۳
۱	<p>ثابت کنید وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.</p>	۴
۱/۵	<p>ماتریس <math>B = \begin{bmatrix} ۲ &amp; ۱ \\ ۴ &amp; ۱ \end{bmatrix}</math> مفروض است. اگر <math>AB = B + I</math> باشد، ماتریس <math>4A</math> را به دست آورید.</p>	۵
۰/۷۵	<p>به ازای چه مقادیری از <math>k</math> دستگاه <math>\begin{cases} kx + 5y = 6 \\ -2x + 4y = 9 \end{cases}</math> یک دسته جواب منحصر به فرد دارد؟</p>	۶
۱/۵	<p>اگر ماتریس <math>\begin{bmatrix} ۱ &amp; -۲ \\ ۳ &amp; ۲ \end{bmatrix}</math> ماتریس قطری باشد، دترمینان ماتریس <math>\begin{bmatrix} m &amp; ۰ &amp; ۰ \\ ۰ &amp; n &amp; ۰ \\ ۰ &amp; ۰ &amp; -m \end{bmatrix}</math> را به دست آورید.</p>	۷



مرکز تحقیق و توسعه آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

## پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۱

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۲ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: هندسه (سری ۲)

بارم	سؤال	ردیف
۱/۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 6 A  &  A  \\ 5 & 4 A ^2 \end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصل $ 3A $ را بیابید.	۸
۱/۵	نقاط $A$ ، $B$ و $C$ در یک صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله و از نقطه $C$ نیز به فاصله ۴ واحد باشد. (بحث کنید)	۹
۱/۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $A(1, 2)$ و $B(3, 0)$ گذشته و خط $y = 2x - 1$ شامل قطری از آن باشد.	۱۰
۱/۵	مرکز دایره محیطی مثلث $ABC$ با رئوس $A(2, 0)$ ، $B(0, 2)$ و $C(2, 2)$ را مشخص کنید.	۱۱
۲	اگر خط $y + 3x = k$ بر دایره $x^2 + y^2 - 3x + y = 0$ مماس باشد، مقدار $k$ را تعیین کنید.	۱۲
۱/۵	طول مماس رسم شده از نقطه $A(-2, 3)$ بر دایره $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$ را به دست آورید.	۱۳
۱/۵	وضعیت نسبی دو دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ و $x^2 + y^2 - 14y - 10x + 73 = 0$ را مشخص کنید.	۱۴
۲۰	جمع بارم	



مرکز تحقیق و توسعه آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

## پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: هندسه (سری ۱)

بارم	سؤال	ردیف
۱	مفاهیم زیر را تعریف کنید. (الف) رویه مخروطی: (ب) مکان هندسی:	۱
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون را ..... می نامیم. (ب) در حالت کلی ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی ..... (ج) دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با ..... (د) اگر صفحه P با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند در این صورت فصل مشترک P با سطح مخروطی یک ..... است.	۲
۱/۵	ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x-1 & y+1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A + B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ باشد: (الف) X و Y را به دست آورید. (ب) ماتریس $B \times A$ را بیابید.	۳
۱	دو ماتریس A و B از مرتبه $3 \times 3$ مثال بزنید که $AB = \bar{0}$ شود، ولی $A \neq \bar{0}$ و $B \neq \bar{0}$ باشد.	۴
۱/۵	اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ باشد، $A^2$ ، $A^3$ ، $A^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ ) را به دست آورید.	۵
۱	از رابطه ماتریسی $A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A را به دست آورید.	۶
۱/۵	دستگاه معادلات $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y = -1 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ را به روش ماتریس وارون حل کنید.	۷
۱/۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 4 &   & A &   & 3 \\ 1 &   & &   &  A  \end{bmatrix}$ ، مقدار دترمینان $A^{-1}$ را به دست آورید.	۸
۱/۲۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $-2A^4$ را به دست آورید.	۹



مرکز پیشرفته آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

## پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۲ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: هندسه (سری ۱)

بارم	سؤال	ردیف
۱/۵	نقاط $A, B, C$ و $D$ در یک صفحه مفروض اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله و از $C$ و $D$ به یک فاصله باشد. (بحث کنید و حالت‌های مختلف را رسم کنید).	۱۰
۱	دایره $x^2 + y^2 = 4$ محورهای مختصات را در چه نقاطی قطع می‌کند؟	۱۱
۱	به ازای چه مقادیری از $m$ معادله $ax^2 + y^2 - x + ay = 2m$ همواره معادله یک دایره را نشان می‌دهد؟	۱۲
۱/۲۵	معادله دایره‌ای به مرکز $O(2, -1)$ را بنویسید که روی خط $4x + 3y = 15$ و تری به طول $2\sqrt{6}$ ایجاد کند.	۱۳
۱/۲۵	دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y + a = 0$ بر خط $3x + 4y + 8 = 0$ مماس است. مقدار $a$ را بیابید.	۱۴
۱/۵	از نقطه $A(2, 3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ ، خطوط $d$ و $L$ را به ترتیب مماس و عمود بر دایره رسم می‌کنیم. معادله‌های خطوط $d$ و $L$ را بنویسید.	۱۵
۱/۲۵	وضعیت نسبی دو دایره به معادله‌های $C: x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ و $C': (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ چگونه است؟	۱۶
۲۰	جمع بارم	



مرکز تحقیق و توسعه آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

## پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: هندسه (سری ۲)

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) ماتریس واحد مرتبه <math>n</math>، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعی مرتبه <math>n</math> است.</p> <p>(ب) دو ماتریس <math>\begin{bmatrix} 1 &amp; -1 \\ 2 &amp; 1 \end{bmatrix}</math> و <math>\begin{bmatrix} 1 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 \end{bmatrix}</math> وارون یکدیگرند.</p> <p>(ج) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک هذلولی است.</p> <p>(د) مختصات مرکز دایره به معادله <math>2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 2 = 0</math>، نقطه <math>(-2, 3)</math> می‌باشد.</p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p>	۱
۱	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>(الف) اگر ماتریسی فقط از یک سطر تشکیل شده باشد، ماتریس ..... می‌گوییم.</p> <p>(ب) شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس مربعی <math>A</math> وارون‌پذیر باشد، این است که .....</p> <p>(ج) اگر در معادله حاصل از برخورد خط و دایره، <math>\Delta</math> معادله بزرگ‌تر از صفر باشد، خط و دایره .....</p> <p>(د) در معادله <math>x^2 + y^2 + ax + by + c = 0</math> اگر ..... باشد، در این صورت معادله، معادله دایره نیست.</p>	۲
۱	<p>اگر در تساوی <math>\begin{bmatrix} 1 &amp; 2 \\ 2 &amp; m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; -9 \end{bmatrix} + 2A - 3I</math>، مجموع درایه‌های قطر اصلی <math>A</math> برابر <math>-4</math> باشد، <math>m</math> را بیابید.</p>	۳
۱/۷۵	<p>اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو ماتریس اسکالر از مرتبه ۳ باشند و <math>(A+B)^2 - (A-B)^2 = 16I</math>، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس <math>A \times B</math> را به دست آورید.</p>	۴
۱/۵	<p>دو ماتریس <math>A = \begin{bmatrix} 1 &amp; -2 \\ 3 &amp; 2 \end{bmatrix}</math> و <math>B = \begin{bmatrix} 4 &amp; a \\ b &amp; -1 \end{bmatrix}</math> مفروضند. اگر <math>B \times A</math> ماتریس قطری باشد، آنگاه ماتریس <math>B^{-1}</math> را به دست آورید.</p>	۵
۲	<p>از رابطه ماتریسی <math>\begin{bmatrix} 2 &amp; 3 \\ 4 &amp; 5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 &amp; -1 \\ -4 &amp; 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 &amp; 0 \\ 0 &amp; 8 \end{bmatrix}</math>، ماتریس <math>A</math> را به دست آورید.</p>	۶
۱/۲۵	<p>مقدار <math>m</math> را طوری بیابید که دستگاه <math>\begin{cases} mx + 2y = m + 2 \\ 3x + (m+5)y = 2 \end{cases}</math> جواب نداشته باشد.</p>	۷
۱/۵	<p>اگر <math>A = \begin{bmatrix}  A  &amp; 0 &amp; m \\ 1 &amp; 2 &amp; 1 \\ 0 &amp;  A  &amp; 1 \end{bmatrix}</math> و رابطه <math> 5A  = 625</math> برقرار باشد، مقدار <math>m</math> چقدر است؟</p>	۸



مرکز پیشرفته آموزش مدارس برتر

باسمه تعالی

## پیش آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۲ از ۲

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: هندسه (سری ۲)

بارم	سؤال	ردیف
۱/۲۵	نقطه A از خط d در صفحه به فاصله ۴ است. با رسم شکل نقاطی در صفحه را پیدا کنید که از A به فاصله ۶ و از خط d به فاصله ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟	۹
۱/۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که از دو نقطه A(۱, ۲) و B(۳, ۰) گذشته و مرکز آن روی خط $y = 2x - 1$ باشد.	۱۰
۱/۲۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ قطرهای آن بوده و بر خط $4x + 3y + 5 = 0$ مماس باشد.	۱۱
۱/۷۵	نقاط $A(-1, -1)$ ، $B(1, 1)$ و $C(1, -3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله مماس بر دایره محیطی مثلث ABC در نقطه B را بنویسید.	۱۲
۱/۵	حدود m را چنان به دست آورید که نقطه $A(-2, m)$ درون دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ باشد.	۱۳
۱/۷۵	مقدار m را چنان بیابید که دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 4x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 8y + m = 0$ مماس بیرون باشند.	۱۴
۲۰	جمع بارم	



مرکز تحقیقات آموزش مدارس برتر

صفحه ۱ از ۲

باسمه تعالی

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: هندسه

کلاس:

ردیف	سؤال	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) حاصل ضرب دو ماتریس قطری یک ماتریس اسکالر است.</p> <p>(ب) اگر <math>A</math> و <math>B</math> ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه و <math>(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2</math> باشد، آنگاه <math>AB = BA</math> است.</p> <p>(ج) در صورتی که ضرب ماتریس‌های <math>A</math> و <math>B</math> ممکن باشد، آنگاه <math> AB  =  BA </math> است.</p> <p>(د) اگر ماتریس <math>A = \begin{bmatrix} 2 &amp; -\frac{1}{2} \\ 3 &amp; \frac{1}{2} \end{bmatrix}</math> باشد، آنگاه <math> A^{-1}  = -\frac{2}{5}</math> است.</p>	<p><input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p>
۲	<p>جاهای خالی را کامل کنید.</p> <p>(الف) دو ماتریس <math>\begin{bmatrix} 2x-y &amp; 5 \\ -z &amp; y \end{bmatrix}</math> و <math>\begin{bmatrix} 3 &amp; 2x+y \\ 2 &amp; y \end{bmatrix}</math> مساویند. مقدار <math>x - y + z</math> برابر ..... است.</p> <p>(ب) اگر <math>C_{6 \times p} = A_{m \times 2} \times B_{n \times 5}</math> باشد، آنگاه مقدار <math>mnp</math> برابر ..... است.</p> <p>(ج) اگر <math>A = \begin{bmatrix} -2 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; -3 &amp; 0 \\ 5 &amp; 0 &amp; -1 \end{bmatrix}</math> باشد، آنگاه <math> A^2 </math> برابر ..... است.</p> <p>(د) اگر <math>A</math> ماتریسی <math>3 \times 3</math> و اسکالر باشد و <math>a_{22} = -3</math>، آنگاه دترمینان <math>A</math> برابر ..... است.</p>	۱
۳	<p>اگر ماتریس <math>A = \begin{bmatrix} 1 &amp; 2 \\ -1 &amp; 3 \end{bmatrix}</math> باشد، ماتریس <math>2A^3 - 5I</math> را به دست آورید.</p>	۱
۴	<p>ثابت کنید وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصر به فرد است.</p>	۱
۵	<p>در تساوی ماتریسی <math>\begin{bmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 &amp; -1 \\ -2 &amp; 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 &amp; 0 \\ 3 &amp; 2 \end{bmatrix}</math>، حاصل <math>a + b + c + d</math> را به دست آورید.</p>	۱/۵
۶	<p>دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که <math>A = \begin{bmatrix} 3 &amp; -5 \\ 4 &amp; 2 \end{bmatrix}</math> ماتریس ضرایب دستگاه بوده و <math>B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}</math> ماتریس مقادیر معلوم آن باشد، سپس جواب دستگاه معادلات را با استفاده از روش ماتریس وارون به دست آورید.</p>	۱/۵
۷	<p>ماتریس‌های <math>A = [a_{ij}] = [2i - j]_{3 \times 1}</math> و <math>B = [b_{ij}] = [ij + 1]_{1 \times 3}</math> را در نظر بگیرید. حاصل دترمینان ماتریس <math>BA</math> را به دست آورید.</p>	۱/۲۵

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: هندسه



مرکز تجزیه و تحلیل آموزش مدارس برتر

صفحه ۲ از ۲

بارم	سؤال	ردیف
۱/۷۵	ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 &   & A &   & 1 & 0 \\ 1 & -1 &   & A & \\ -1 & 0 & 2 & \end{bmatrix}$ و ماتریس اسکالر B از مرتبه ۳ که مجموع درایه‌های آن برابر  A  است را در نظر بگیرید. در این صورت $ -3B $ را بیابید.	۸
۱/۵	نقاط A، B و C در صفحه مفروضند. نقطه‌ای در صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از نقطه C به فاصله ۴cm باشد. (با رسم حالت‌های مختلف بحث کنید)	۹
۱/۲۵	کدام یک از روابط زیر دایره است؟ در صورت دایره بودن آن را رسم کنید. الف) $-3x^2 - 3y^2 + 6x + 3y - 5 = 0$ ب) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$	۱۰
۱/۲۵	معادله دایره‌ای به شعاع ۳ را بنویسید که خط $2x - y = 0$ شامل قطری از آن بوده و بر محور yها در ناحیه اول مماس باشد.	۱۱
۱/۵	مقادیر m و n را چنان به دست آورید که دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2y + n = 0$ گذرا از نقطه $A(1, 2)$ ، بر خط $x + y = m$ مماس باشد.	۱۲
۱/۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(0, 1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x + y = 2$ و تری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.	۱۳
۱/۵	وضعیت نقطه $M(0, -1)$ نسبت به دایره محیطی مثلث ABC با رئوس $A(2, 1)$ ، $B(-1, 3)$ و $C(4, 4)$ را تعیین کنید.	۱۴
۱/۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(-1, 2)$ بوده و با دایره $x^2 + y^2 - 6y = 0$ مماس داخل باشد.	۱۵
۲۰	جمع بارم	



مرکز تحقیق آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۰/۶

صفحه ۱ از ۲

باسمه تعالی

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: هندسه

کلاس:

بارم	سؤال	ردیف
۱	<p>کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟</p> <p>الف) ماتریس <math>A = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} &amp; 3 \\ -4 &amp; -2\sqrt{3} \end{bmatrix}</math> در تساوی <math>(2A - I)^2 = I - 4A</math> صدق می کند. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>ب) دو ماتریس <math>C = \begin{bmatrix} a+3 &amp; b &amp; -\frac{9}{2} \\ b-2 &amp; 0 &amp; 1+2a \end{bmatrix}</math> و <math>D = [d_{ij}]_{a \times b}</math> مساویند. پس کوچک ترین درایه ماتریس <math>D</math> عدد <math>-2</math> است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>ج) حاصل ضرب دو ماتریس اسکالر ماتریس همانی است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>د) در تساوی <math>A \times \begin{bmatrix} 2 &amp; -1 &amp; 13 \\ 0 &amp; -1 &amp; 4 \\ 0 &amp; 0 &amp; -2 \end{bmatrix} = 2I</math> دترمینان ماتریس <math>A</math> برابر ۲ است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p>	۱
۱	<p>اگر <math>A</math> و <math>B</math> ماتریس های <math>3 \times 3</math> باشند و داشته باشیم <math>(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2</math> آنگاه ثابت کنید <math>AB = BA</math>.</p>	۲
۱/۵	<p>اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو ماتریس مربعی از مرتبه ۲ و <math>AB = \begin{bmatrix} -1 &amp; 4 \\ 2 &amp; 3 \end{bmatrix}</math> باشد، آنگاه مجموع درایه های قطر فرعی ماتریس <math>A \begin{bmatrix} 6 &amp; 1 \\ 3 &amp; 2 \end{bmatrix} B - \frac{2}{3} A \begin{bmatrix} 6 &amp; 3 \\ 9 &amp; 2 \\ 2 &amp; 0 \end{bmatrix} B</math> را به دست آورید.</p>	۳
۱/۵	<p>ماتریس های <math>A = [a_{ij}]_{3 \times 2}</math> و <math>B = [b_{ij}]_{2 \times 3}</math> به صورت <math>a_{ij} = \begin{cases} i-j &amp; i &gt; j \\ i^2 - 1 &amp; i = j \\ j-i &amp; i &lt; j \end{cases}</math> و <math>b_{ij} = \begin{cases} i-j &amp; i &gt; j \\ j^2 - 1 &amp; i = j \\ i-j+2 &amp; i &lt; j \end{cases}</math> معرفی شده اند. حاصل <math>BA - I</math> را به دست آورید.</p>	۴
۱	<p>دستگاه معادلات <math>\begin{cases} 3x + y = \frac{3}{2} \\ x + 2y = -\frac{1}{3} \end{cases}</math> را به روش ماتریس وارون حل کنید.</p>	۵
۱/۵	<p>ماتریس <math>A = \begin{bmatrix} m+3 &amp; -m \\ -2 &amp; 1 \end{bmatrix}</math> وارون پذیر نیست. مجموع درایه های وارون ماتریس <math>\begin{bmatrix} 2m+1 &amp; 1-m \\ m &amp; m+1 \end{bmatrix}</math> را به دست آورید.</p>	۶
۱	<p>به ازای چه مقدار <math>m</math> دستگاه معادلات زیر بی شمار جواب دارد؟</p> $\begin{cases} mx + (m-3)y = 2m+1 \\ (m+6)x - (m+2)y = 5m+10 \end{cases}$	۷



مرکز تحقیق آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۱۰/۶

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: هندسه

ردیف	سؤال	بارم
۸	اگر $2A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 &   & A \\ -1 & & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس A را بیابید.	۱/۵
۹	هر یک از جملات زیر را با عبارت مناسب پر کنید تا گزاره درستی ایجاد شود. الف) مساحت دایره $a^2 = ax + (a+3)y + 2y^2 + x^2 + (a+1)$ برابر ..... است. ب) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل ..... است. ج) طول مماس رسم شده از نقطه $A(-1, 2)$ بر دایره $\frac{1}{4} = (y-1)^2 + (x+1)^2$ مساوی ..... است. د) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت یک که بر دایره $9 = (y+2)^2 + (x-1)^2$ مماس خارج باشند، دایره‌ای به مرکز $O(1, -2)$ و شعاع ..... است.	۱
۱۰	نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. با رسم شکل در تعداد جواب‌ها بحث کنید.	۲
۱۱	نشان دهید طول شعاع دایره به معادله ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ برابر $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ است.	۱
۱۲	دو دایره $0 = 7x^2 + 14y - 10x - x^2 + y^2 - 3$ و $3 = 4x - 6y - x^2 + y^2$ چند مماس مشترک دارند؟ چرا؟	۱/۵
۱۳	معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $5 = 2x + y$ و $-1 = y - x$ شامل قطرهایی از آن بوده و $A(2, 5)$ نقطه‌ای از آن باشد.	۱/۵
۱۴	دایره C به مرکز $O(-1, 0)$ روی خط $0 = 6 - 4x + 3y$ و تری به طول $2\sqrt{5}$ جدا می‌کند. مختصات نقاط برخورد این دایره با محور xها را به دست آورید.	۲
۱۵	نقاط $(2, 3)$ و $(0, 1)$ دو رأس مقابل یک مستطیل هستند. معادله دایره محیطی این مستطیل را بنویسید.	۱
	جمع باریم	۲۰



مرکز تحقیقات آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۳

صفحه ۱ از ۲

باسمه تعالی

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: هندسه

ردیف	سؤال	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را برای ماتریس های <math>A</math> و <math>B</math> مشخص نمایید.</p> <p>(الف) اگر <math>AB = I</math> آنگاه <math>A = I</math> یا <math>B = I</math></p> <p>(ب) اگر <math>AB = BA</math> حاصل عبارت <math>A^2 - B^2</math> برابر <math>(A - B)(A + B)</math> می باشد.</p> <p>(ج) حاصل ضرب دو ماتریس قطری خاصیت جابه جایی دارد.</p> <p>(د) اگر در یک ماتریس <math> A  =  A^{-1} </math> باشد، آنگاه <math> A </math> همواره برابر یک است.</p>	<p><input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p>
۲	<p>ماتریس های <math>A = \begin{bmatrix} a &amp; 4 \\ 3 &amp; b \end{bmatrix}</math> و <math>B = \begin{bmatrix} 1 &amp; -2 \\ 3 &amp; 2 \end{bmatrix}</math> مفروض است. اگر ماتریس <math>A \times B</math> قطری باشد، مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را به دست آورید.</p>	۱
۳	<p>ماتریس های مربعی <math>A</math>، <math>B</math> و <math>C</math> مفروضند. اگر <math>AC = I</math> و <math>BA = I</math>، ثابت کنید <math>B = C</math>.</p>	۱
۴	<p>اگر ماتریس <math>A = \begin{bmatrix} 2 &amp; m+1 \\ -5 &amp; 2-m \end{bmatrix}</math> وارون پذیر نباشد، درایه های وارون ماتریس <math>A + 3I</math> را بیابید.</p>	۱/۵
۵	<p>اگر <math>A = \begin{bmatrix} 1 &amp; 1 &amp; 2 \\ 0 &amp; 1 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; -1 \end{bmatrix}</math> باشد، دترمینان ماتریس <math>\frac{1}{4}A^4</math> را محاسبه کنید.</p>	۱
۶	<p>اگر <math>A = \begin{bmatrix} 1 &amp; 0 \\ 1 &amp; -1 \end{bmatrix}</math> مجموع درایه های ماتریس <math>A^{100} - A^{101}</math> را بیابید.</p>	۲
۷	<p>در حل دستگاه <math>\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = m \end{cases}</math> اگر ماتریس <math>\begin{bmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{bmatrix}</math> وارون ضرایب باشد و مقدار <math>y = -1</math> آنگاه مقدار <math>x</math> را بیابید.</p>	۲
۸	<p>خط <math>d</math> و نقطه <math>A</math> مفروض اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از خط <math>d</math> به فاصله ۳ و از نقطه <math>A</math> به فاصله ۴ واحد باشد؟ (بحث کنید).</p>	۱/۵
۹	<p>مرکز دایره <math>x^2 + y^2 + 2x + ay = 3</math> روی خط <math>y = 2x + 1</math> قرار دارد. طول شعاع دایره را به دست آورید.</p>	۱/۵



مرکز تحقیق و آموزش مدارس برتر

تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۳

صفحه ۲ از ۲

باسمه تعالی

## آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

پایه: دوازدهم (رشته ریاضی)

نام و نام خانوادگی:

مدرسه:

نام درس: هندسه

کلاس:

ردیف	سؤال	بارم
۱۰	معادله دایره‌ای را بنویسید که محل برخورد خط $2x - 3y = 6$ با محورهای مختصات دو سر قطر آن باشد.	۱
۱۱	معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = 3$ و $x - 2y = 0$ شامل قطرهایی از آن بوده و بر نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات مماس باشد.	۱/۵
۱۲	معادله خط مماس در نقطه $A(-1, 6)$ واقع بر دایره $x^2 + y^2 - 6x - 14y + 41 = 0$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۳	بیشترین فاصله نقطه $A \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$ تا دایره $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ را تعیین کنید.	۱
۱۴	در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. الف) اگر صفحه $P$ بر محور سطح مخروطی ..... باشد و از رأس نگذرد، فصل مشترک یک دایره است. ب) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی در صفحه که بر خط $d$ در نقطه ثابت $A$ مماس باشد، خطی ..... بر خط $d$ است. ج) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی به شعاع $2\text{cm}$ که بر دایره $C(O, 5)$ در صفحه دایره مماس خارج‌اند دایره‌ای به شعاع ..... می‌باشد. د) نقطه $A(-1, -1)$ ..... دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ قرار دارد.	۱
۱۵	مقدار $m$ را بیابید به طوری که دو دایره $x^2 + y^2 - 6x - 2y = -9$ و $x^2 + y^2 + 2x + 4y + m = 0$ مماس داخل باشند.	۱/۵
	جمع بارج	۲۰



دفترچه پاسخنامه

# هندسه پایه دوازدهم

آرشیو آزمون‌های تشریحی نیمسال اول



## پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(د) بی شمار

(ج) -۷۲

(ب) سهمی

(الف) -۲۱۶

(و)  $\frac{1}{10}$ 

(ه) نیم‌ساز آن زاویه

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۲۶، ۲۹، ۳۱، ۳۵، ۳۸ و ۳۹)

## پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(د) درست

(ج) نادرست

(ب) نادرست

(الف) نادرست

(و) درست

(ه) نادرست

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۷، ۲۰، ۲۱، ۲۳، ۲۶ و ۲۷)

## پاسخ سؤال ۳: (۱/۲۵ نمره)

ماتریس A قطری است، پس:

$$\begin{cases} m+1=0 \Rightarrow m=-1 \text{ (نمره } 0/25) \\ n-2=0 \Rightarrow n=2 \text{ (نمره } 0/25) \end{cases}$$

بنابراین:

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

(نمره ۰/۲۵)      (نمره ۰/۲۵)      (نمره ۰/۲۵)

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۲ و ۱۸)

## پاسخ سؤال ۴: (۱/۲۵ نمره)

ابتدا ماتریس A را پیدا می‌کنیم. برای این کار از طرفین تساوی  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$  وارون می‌گیریم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ (نمره } 0/5)$$

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d = \frac{3}{2} \text{ (نمره } 0/25)$$

(نمره ۰/۵)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)

## پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(نمره ۰/۲۵)      (نمره ۰/۲۵)

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ (نمره } 0/5)$$

(نمره ۰/۲۵)

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \text{ (نمره } 0/25)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۵)

## پاسخ سؤال ۶: (۱ نمره)

درایه‌های ماتریس A به صورت زیر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \text{ (نمره } 0/5)$$

اکنون حاصل دترمینان A را بر حسب سطر اول محاسبه می‌کنیم.

$$|A| = -1(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + (-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(-8+0) - 1(1+6) = -8-7 = -15 \text{ (نمره } 0/5)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۸)



پاسخ سؤال ۷: (۱ نمره)

$$|A| = 4|A|^2 - 3 \Rightarrow 4|A|^2 - |A| - 3 = 0 \Rightarrow (4|A| + 3)(|A| - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \text{ (نمره } \frac{1}{25}) \\ |A| = -\frac{3}{4} \text{ (نمره } \frac{1}{25}) \end{cases}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۸)

پاسخ سؤال ۸: (۱/۲۵ نمره)

$$|A| = -6 \text{ (نمره } \frac{1}{25}), |B| = -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \text{ (نمره } \frac{1}{25})$$

$$|BA^T| = |B| \times |A|^T = 14 \times (-6)^2 = 504 \text{ (نمره } \frac{1}{25})$$

$$|-2I_p| = (-2)^T |I_p| = -8 \text{ (نمره } \frac{1}{25})$$

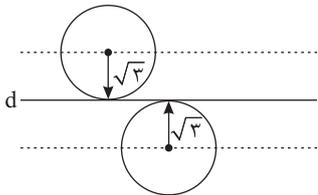
بنابراین:

$$|BA^T| + |-2I_p| = 504 - 8 = 496 \text{ (نمره } \frac{1}{25})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۳۰ و ۳۱)

پاسخ سؤال ۹: (۱ نمره)

این مکان دو خط موازی با خط  $d$  در طرفین آن به فاصله  $\sqrt{3}$  از خط  $d$  است. (نمره  $\frac{1}{5}$ )

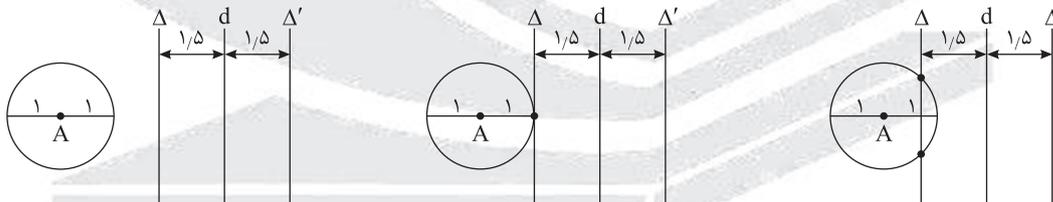


(نمره  $\frac{1}{5}$ )

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۹)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱/۵ نمره)

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از  $A$  به فاصله ۱ سانتی متر هستند، دایره‌ای به مرکز  $A$  و شعاع ۱ سانتی متر است (نمره  $\frac{1}{25}$ ) و مکان هندسی نقاطی که از خط  $d$  به فاصله  $\frac{1}{5}$  سانتی متر است دو خط موازی با  $d$  است. (نمره  $\frac{1}{25}$ ) نقاط برخورد این دو مکان جواب این مسئله هستند. (نمره  $\frac{1}{25}$ ) با توجه به شکل‌های زیر، مسئله حداکثر ۲ جواب دارد.



هیچ جواب

(نمره  $\frac{1}{25}$ )

یک جواب

(نمره  $\frac{1}{25}$ )

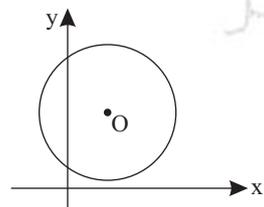
دو جواب

(نمره  $\frac{1}{25}$ )

حالتی که دو خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  دایره را قطع کند، ایجاد نمی‌شود، پس حالت چهار نقطه به وجود نمی‌آید. همچنین سه نقطه جواب این مسئله نیست.

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۹)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱ نمره)



$$4(x - \frac{1}{4})^2 + 4(y - \frac{3}{4})^2 = 8 \Rightarrow (x - \frac{1}{4})^2 + (y - \frac{3}{4})^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} O(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \text{ (نمره } \frac{1}{25}) \\ R = \sqrt{2} \text{ (نمره } \frac{1}{25}) \end{cases}$$

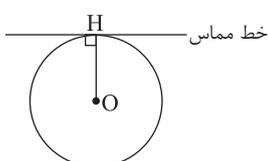
(نمره  $\frac{1}{25}$ )

از ناحیه‌های ۱ و ۲ می‌گذرد.

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۰)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱/۵ نمره)

نقطه تلاقی دو قطر، مرکز دایره است و فاصله مرکز تا خط مماس برابر شعاع دایره است.



$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \text{ و } y = 3 \Rightarrow O(2, 3) \text{ (نمره } \frac{1}{5})$$

$$R = OH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - 9 - 4|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{5}{5} = 1 \text{ (نمره } \frac{1}{5})$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1 \text{ (نمره } \frac{1}{5})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۶)



## پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۲۵ نمره)

نقطه  $A(0, -1)$  روی دایره قرار دارد، پس شیب خط مماس، عکس و قرینه شیب شعاع  $OA$  است.

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \Rightarrow O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, 1) \quad (\text{نمره } 0/25)$$

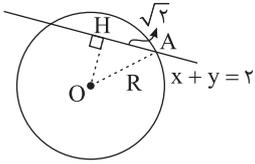
$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{-1 - 1}{0 - 1} = 2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

پس شیب خط مماس  $-\frac{1}{2}$  است. (نمره ۰/۲۵)

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y + 1 = -\frac{1}{2}x \quad \text{یا} \quad 2y + x + 2 = 0 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۰)

## پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۵ نمره)



$$OH = \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$R^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\text{معادله دایره: } x^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{2} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۳)

## پاسخ سؤال ۱۵: (۱/۵ نمره)

$$O'\left(-\left(-\frac{2}{3}\right), -\frac{4}{3}\right) = (1, -2) \quad , \quad R' = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 16 - 4} = 2 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$OO' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow R + R' = 5 \Rightarrow R = 3 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(نمره ۰/۲۵)

$$\text{معادله دایره: } (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۳)



## پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(د) درست

(ج) نادرست

(ب) درست

(الف) نادرست

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۲، ۲۲، ۲۷، ۳۴ و ۴۰)

## پاسخ سؤال ۲: (۱ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 10 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۱)

## پاسخ سؤال ۳: (۱/۲۵ نمره)

$$2A = 3I + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2m & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2m & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2m & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ m & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$A \text{ مجموع درایه‌های } A: 3 + \frac{7}{2} - \frac{1}{2} + m = 10 \Rightarrow 6 + m = 10 \Rightarrow m = 4$$

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

## پاسخ سؤال ۴: (۱/۵ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } \dots$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^{15} = \begin{bmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{15} + 2A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -35 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۰)

## پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)

طرفین تساوی داده شده را از راست در وارون ماتریس  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ (نمره } 0/5)$$

$$A \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ (نمره } 0/75)$$

بنابراین مجموع درایه‌های A برابر ۱ است. (نمره ۰/۲۵)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)

## پاسخ سؤال ۶: (۱/۵ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } |A| = 9 + 4 = 13 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ (نمره } 0/25)$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 26 \\ 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2, y = 3 \text{ (نمره } 0/25)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۴)

## پاسخ سؤال ۷: (۱ نمره)

$$|-A| = (-1)^2 |A| = 3$$

$$\| -A \| |A| = |3A| = 3^2 |A| = 9 \times 3 = 27$$

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۲۸ و ۳۱)



## پاسخ سؤال ۸: (۱/۷۵ نمره)

از طرفین تساوی داده شده دترمینان می گیریم.

$$A = \begin{bmatrix} -|A| & -5 \\ |A| & 4|A| \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -|A| & -5 \\ |A| & 4|A| \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = -4|A|^2 + 5|A| \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\Rightarrow 4|A|^2 - 4|A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 1 \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/5) \quad \text{غقق}$$

بنابراین:

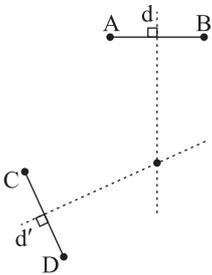
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A + I = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$|A + I| = 0 - (-5) = 5 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۰)

## پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمودمنصف پاره خط AB است. این خط را d می نامیم. (نمره ۰/۲۵)  
مکان هندسی نقاطی که از C و D به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره خط CD است. این خط را d' می نامیم. (نمره ۰/۲۵)  
نقطه برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نمره ۰/۲۵)  
اگر d و d' متقاطع باشند، مسئله یک جواب دارد. (نمره ۰/۲۵)  
اگر d و d' منطبق باشند، مسئله بی شمار جواب دارد. (نمره ۰/۲۵)  
اگر d و d' موازی باشند، مسئله جواب ندارد. (نمره ۰/۲۵)



(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۹)

## پاسخ سؤال ۱۰: (۱ نمره)

مقطع مخروطی  $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$  یک دایره است. ابتدا طرفین معادله را بر ۲ تقسیم می کنیم.

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y - 2 = 0 \xrightarrow{+2} x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - c}{2} = \frac{\sqrt{4+1+4}}{2} = \frac{3}{2} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

بنابراین:

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\pi \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۱)

## پاسخ سؤال ۱۱: (۱ نمره)

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow 4 + 25 - 4(-a) > 0$$

$$(\text{نمره } 0/25) \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow 4a > -29 \Rightarrow a > \frac{-29}{4}$$

$$(\text{نمره } 0/25) \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۲)

## پاسخ سؤال ۱۲: (۱ نمره)

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 + 8|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{11}{5} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{121}{25} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۳)

## پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۲۵ نمره)

$$\text{مركز دایره } O = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-7+5}{2}\right) = (1, -1) \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\text{طول قطر} = |AB| = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

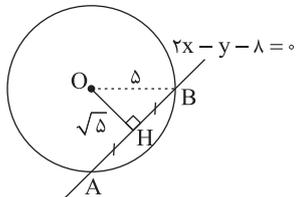
$$\Rightarrow \text{شعاع} = r = 2\sqrt{10} \Rightarrow \text{معادله دایره: } (x-1)^2 + (y+1)^2 = 40 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(نمره ۰/۲۵)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۰)



## پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۲۵) (نمره)



$$O(2, 1), R = 5 \text{ (نمره } 0/25)$$

$$OH = \frac{|2 \times 2 - 1 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ (نمره } 0/5)$$

$$\triangle BOH (\hat{H} = 90^\circ): OH^2 + HB^2 = OB^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{5})^2 + HB^2 = 5^2 \Rightarrow HB^2 = 20 \Rightarrow HB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow AB = 2HB = 4\sqrt{5} \text{ (نمره } 0/5)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۳)

## پاسخ سؤال ۱۵: (۱) (نمره)

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(-1, 1) \\ R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4+4} = \sqrt{2} \text{ (نمره } 0/5) \end{cases}$$

$$OA = \sqrt{(-2+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5} \text{ (نمره } 0/25)$$

با توجه به اینکه  $OA > R$  است، پس نقطه A بیرون دایره قرار دارد. (نمره ۰/۲۵)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۶)

## پاسخ سؤال ۱۶: (۱/۵) (نمره)

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) = (3, -1) \\ R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{36+4-4(6)} = 2 \text{ (نمره } 0/5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} O'(-1, 1) \\ R' = 1 \end{cases}, R + R' = 3 \text{ (نمره } 0/25)$$

فاصله دو مرکز برابر با  $d = \sqrt{(3+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{20}$  است. (نمره ۰/۵)با توجه به اینکه  $d > R + R'$  است، دو دایره بیرون یکدیگرند (متخارجند). (نمره ۰/۲۵)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۴)



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) دترمینان A (ب) ۲۷

ج) دایره

د) ۲

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۲۳، ۳۰، ۳۹ و ۴۲)

پاسخ سؤال ۲: (۱/۵ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{نمره } 0/5) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$2A - B + 3I = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -5 \\ -1 & 7 & 0 \\ -1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۰)

پاسخ سؤال ۳: (۱/۷۵ نمره)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$A^2 = mA + nI = \begin{bmatrix} 0 & -2m \\ m & -3m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & -2m \\ m & n-3m \end{bmatrix} \quad (\text{نمره } 0/25) \quad (\text{نمره } 0/25) \quad (\text{نمره } 0/25)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} n = -2 & (\text{نمره } 0/25) \\ m = -3 & (\text{نمره } 0/25) \end{cases}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۰)

پاسخ سؤال ۴: (۱ نمره)

فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند. ثابت می‌کنیم B = C

$$AB = BA = I \quad \text{طبق فرض}$$

$$AC = CA = I \quad \text{طبق فرض}$$

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)

پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)

$$AB = B + I \xrightarrow{\text{از راست ضربدر } B^{-1}} A = I + B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 4A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۲۳ و ۲۵)

پاسخ سؤال ۶: (۰/۷۵ نمره)

$$\frac{k}{-2} \neq \frac{5}{4} \Rightarrow k \neq -\frac{5}{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(نمره ۰/۵)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۱)

پاسخ سؤال ۷: (۱/۵ نمره)

در ماتریس قطری، درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند.

$$\begin{bmatrix} 4 & m \\ n & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3m & -8+2m \\ n-3 & -2n-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -8+2m=0 \Rightarrow m=4 \\ n-3=0 \Rightarrow n=3 \end{cases}$$

(نمره ۰/۵)

(نمره ۰/۵)

بنابراین:

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (4)(3)(-4) = -48 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۱)



## پاسخ سؤال ۸: (۱/۵ نمره)

$$|A| = 24|A|^3 - 5|A| \Rightarrow 24|A|^3 - 6|A| = 0$$

(نمره ۰/۵)

$$\Rightarrow 6|A|(4|A|^2 - 1) = 0 \Rightarrow 6|A|(2|A| - 1)(2|A| + 1) = 0$$

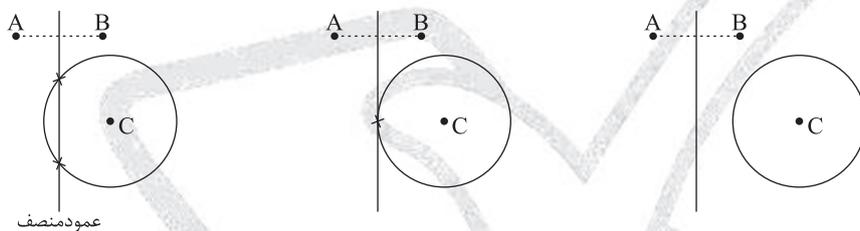
$$\Rightarrow |A| = 0 \text{ یا } |A| = \frac{1}{2} \text{ یا } |A| = \frac{-1}{2} \text{ (نمره ۰/۵)}$$

$$|3A| = 9|A| = 0 \text{ یا } \frac{9}{2} \text{ یا } -\frac{9}{2} \text{ (نمره ۰/۵)}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۵)

## پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

در این مسئله باید ببینیم دایره، خط عمود منصف را در چند نقطه قطع می کند که واضح است جواب صفر یا ۱ یا ۲ نقطه می تواند باشد.

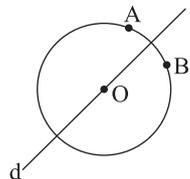


عمود منصف

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۳۶ تا ۳۸)

## پاسخ سؤال ۱۰: (۱/۵ نمره)

مرکز دایره روی خط  $d$  به معادله  $y = 2x - 1$  قرار دارد؛ بنابراین مختصات مرکز به صورت  $O(\alpha, 2\alpha - 1)$  است. (نمره ۰/۲۵)



$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 3)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

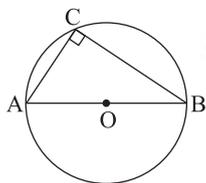
(نمره ۰/۲۵)

$$\begin{cases} O(0, -1) \\ R = \sqrt{1} \end{cases} \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

$$\text{معادله دایره: } (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = 1 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۶)

## پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۵ نمره)



$$m_{AB} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$m_{BC} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow C = 90^\circ$$

$$m_{AC} = \frac{2}{2}$$

$$O\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (1, 1)$$

(وسط AB)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۶)

## پاسخ سؤال ۱۲: (۲ نمره)

$$O\left(\frac{2}{2}, \frac{-1}{2}\right), R = \frac{1}{2}\sqrt{9+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10}, OH = \frac{\left|-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - k\right|}{\sqrt{10}} = \frac{|4-k|}{\sqrt{10}}$$

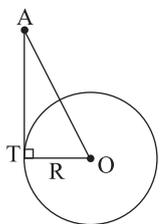
$$OH = R \Rightarrow \frac{|4-k|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow |4-k| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 4-k = 5 \Rightarrow k = -1 \\ 4-k = -5 \Rightarrow k = 9 \end{cases}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۴۳ و ۴۶)



## پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۵ نمره)

نقطه A خارج دایره واقع است. (۲۵/۰ نمره)



$$x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(0, -1) \\ R = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \sqrt{2} \quad (۵/۰ \text{ نمره}) \end{cases}$$

$$OA = \sqrt{(-2-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$\triangle OAT: AT^2 = OA^2 - OT^2 \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow AT^2 = 20 - 2 = 18$$

$$\Rightarrow AT = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۴۵ و ۴۶)

## پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۵ نمره)

مختصات مراکز دو دایره و شعاع های آنها را پیدا می کنیم.

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O = (2, 3) \\ R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 36 + 12}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad (۵/۰ \text{ نمره}) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O' = (5, 7) \\ R' = \frac{\sqrt{100 + 196 - 292}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad (۵/۰ \text{ نمره}) \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

 $OO' = R + R'$  است (۲۵/۰ نمره)، پس دو دایره مماس بیرونی هستند.

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۴)



## پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۵/۵ نمره)

الف) رویه مخروطی: اگر دو خط  $d$  و  $l$  در نقطه  $A$  متقاطع (غیرعمود) باشند، سطح حاصل از دوران  $d$  حول  $l$  را یک رویه مخروطی گویند.  
ب) مکان هندسی: مجموعه نقاطی از صفحه (فضا) هستند که دارای ویژگی مشترک باشند و هر نقطه این ویژگی را داشت عضو این مجموعه باشد.

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۳۴ و ۳۶)

## پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) ماتریس

ب) ندارد

ج) حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی

د) سهمی

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۱۰، ۱۲، ۱۹، ۳۰ و ۳۵)

## پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x-1 & y+1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & y-2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

(۵/۵ نمره)

$$\text{الف) } \begin{cases} x+1=4 \Rightarrow x=3 \\ y-2=-3 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

$$\text{ب) } B = \begin{bmatrix} 3-1 & -1+1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۱۳، ۱۴ و ۱۸)

باید درایه های نظیر به نظیر برابر باشند، پس:

## پاسخ سؤال ۴: (۱ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \vec{0}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۰)

## پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)

ماتریس  $A$  را تشکیل می دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{bmatrix} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{bmatrix} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

بنابراین:

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۰)

## پاسخ سؤال ۶: (۱ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۴)

## پاسخ سؤال ۷: (۱/۵ نمره)

دستگاه را به صورت ماتریسی می نویسیم.

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{A^{-1} \times} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

(۲۵/۰ نمره) (۷۵/۰ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(۵/۵ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۱)



## پاسخ سؤال ۸: (۱/۵ نمره)

$$|A| = 4|A|^2 - 3 \Rightarrow 4|A|^2 - |A| - 3 = 0 \Rightarrow (4|A| + 3)(|A| - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = 1 & \text{(نمره ۰/۲۵)} \\ |A| = -\frac{3}{4} \Rightarrow |A^{-1}| = -\frac{4}{3} & \text{(نمره ۰/۲۵)} \end{cases}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۰)

## پاسخ سؤال ۹: (۱/۲۵ نمره)

$$|A| = 1(-1-1) - 1(0-1) + 2(0-1) = -2 + 1 - 2 = -3 \quad \text{(نمره ۰/۵)}$$

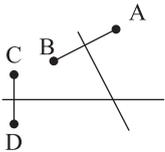
$$|-2A^4| = (-2)^4 |A|^4 = -8 \times (-3)^4 = -648 \quad \text{(نمره ۰/۷۵)}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۸)

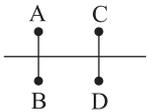
## پاسخ سؤال ۱۰: (۱/۵ نمره)

نقطه برخورد؛ از برخورد عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AB و CD به دست می‌آید که ۳ حالت دارد:

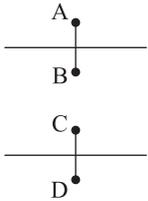
حالت ۱: یک نقطه (۰/۵ نمره)



حالت ۲: بی‌شمار نقطه اگر عمودمنصف‌ها برهم منطبق باشند. (۰/۵ نمره)



حالت ۳: هیچ نقطه اگر عمودمنصف‌ها برخورد نداشته باشند. (۰/۵ نمره)



(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۹)

## پاسخ سؤال ۱۱: (۱ نمره)

چهار نقطه

$$x = 0 \Rightarrow 1 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} A(0, \sqrt{3}) & \text{(نمره ۰/۲۵)} \\ B(0, -\sqrt{3}) & \text{(نمره ۰/۲۵)} \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \Rightarrow x = +1 & \Rightarrow C(1, 0) & \text{(نمره ۰/۲۵)} \\ x+1 = -2 \Rightarrow x = -3 & \Rightarrow D(-3, 0) & \text{(نمره ۰/۲۵)} \end{cases}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۰)

## پاسخ سؤال ۱۲: (۱ نمره)

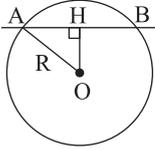
$$a = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - x + y - 2m = 0 \quad \text{(نمره ۰/۲۵)}$$

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow 1 + 1 + 4m > 0 \Rightarrow 4m > -2 \Rightarrow m > -\frac{1}{2} \quad \text{(نمره ۰/۲۵)}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۶)



## پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۲۵) نمره



بنابر فرض، طول وتر AB برابر  $2\sqrt{6}$  است. اگر OH عمود بر خط  $4x + 3y = 15$  باشد، پس  $AH = \sqrt{6}$  است. (نمره ۰/۲۵)

$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - 3 - 15|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{10}{5} = 2 \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\triangle OAH: OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow R^2 = 6 + 4 = 10 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

بنابراین معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۳۳)

## پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۲۵) نمره

فاصله مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است.

$$O(2, -1) \Rightarrow \text{فاصله } O \text{ تا خط مماس} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|6 - 4 + 8|}{\sqrt{9 + 16}} = 2 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$R = \frac{\sqrt{16 + 4 - 4a}}{2} = \sqrt{5 - a} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

بنابراین:

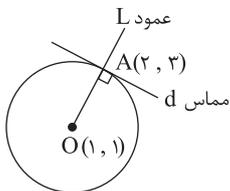
$$\sqrt{5 - a} = 2 \Rightarrow a = 1 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۳۳)

## پاسخ سؤال ۱۵: (۱/۵) نمره

خط عمود از مرکز دایره می‌گذرد و این دو خط در نقطه A بر هم عمودند. (نمره ۰/۲۵)

مرکز دایره  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$  عبارت است با:  $O(1, 1)$  (نمره ۰/۲۵)



$$m_{OA} = m_L = \frac{3-1}{2-1} = 2 \Rightarrow \text{معادله خط } L: y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 1 \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\text{معادله خط مماس } d: y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4 \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۳۳)

## پاسخ سؤال ۱۶: (۱/۲۵) نمره

ابتدا مرکز دو دایره و شعاع‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} C: O(1, -1), R = \frac{\sqrt{4+4-4}}{2} = 1 \\ C': O'(-1, 1), R' = \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{نمره } ۰/۵) \quad OO' = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

$$\left. \begin{aligned} OO' > R + R' \\ 2\sqrt{2} > 1 + \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{دو دایره متخارج‌اند.} \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۳۶)



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(د) نادرست

(ج) نادرست

(ب) نادرست

(الف) درست

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۹، ۲۳، ۳۹ و ۴۲)

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(ب)  $|A| \neq 0$  یا دترمینان  $A$  مخالف صفر باشد.

(د)  $a^2 + b^2 - 4c \leq 0$  یا  $a^2 + b^2 \leq 4c$

(الف) سطری

(ج) متقاطع اند

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۲، ۱۹، ۲۳، ۴۲ و ۴۵)

پاسخ سؤال ۳: (۱ نمره)

$$2A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -6-m \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3-\frac{m}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$1 - 3 - \frac{m}{2} = -4 \Rightarrow \frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m = 4 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴)

پاسخ سؤال ۴: (۱/۷۵ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = kI \quad (\text{نمره } 0/25) \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} k' & 0 & 0 \\ 0 & k' & 0 \\ 0 & 0 & k' \end{bmatrix} = k'I \quad (\text{نمره } 0/25)$$

چون  $A$  و  $B$  اسکالر هستند، پس تعویض پذیرند یعنی  $AB = BA$  و اتحادها برقرار است (نمره ۰/۲۵)، پس:

$$\begin{cases} (A+B)^T - (A-B)^T = 16I \Rightarrow A^T + 2AB + B^T - A^T - B^T + 2AB = 16I \\ \Rightarrow 4AB = 16I \xrightarrow{\div 4} AB = 4I \Rightarrow (kI)(k'I) = 4I \Rightarrow (kk')I^T = 4I \\ \Rightarrow (kk')I = 4I \Rightarrow (kk' - 4)I = 0 \xrightarrow{I \neq 0} kk' = 4 \end{cases} \quad (\text{نمره } 0/75)$$

$$AB = \begin{bmatrix} kk' & 0 & 0 \\ 0 & kk' & 0 \\ 0 & 0 & kk' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 4 + 4 + 4 = 12 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)

در ماتریس قطری درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند.

$$B \times A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2a & -8+2a \\ b-2 & -2b-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -8+2a=0 \Rightarrow a=4 \\ b-2=0 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)

پاسخ سؤال ۶: (۲ نمره)

رابطه داده شده را از سمت چپ در  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$  و سپس از سمت راست در  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$  ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow A = \left( \frac{1}{10-12} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow A = \frac{4}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$\Rightarrow A = - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)



## پاسخ سؤال ۷: (۱/۲۵) نمره

$$\frac{m}{3} = \frac{2}{m+5} \neq \frac{m+2}{2} \Rightarrow m^2 + 5m = 6 \Rightarrow (m+6)(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -6 & \text{غیر قابل قبول (نمره ۰/۲۵)} \\ m = 1 & \text{قابل قبول (نمره ۰/۲۵)} \end{cases}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۲۶ و ۳۱)

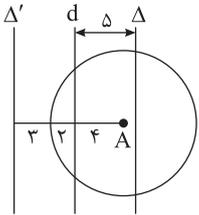
## پاسخ سؤال ۸: (۱/۵) نمره

$$5 | \Delta A | = 625 \Rightarrow 5 \times 5^2 | A | = 625 \Rightarrow | A | = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow | A | = 1 = 1(2-1) - 0 + m(1-0) \Rightarrow 1 = 1 + m \Rightarrow m = 0$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۰)

## پاسخ سؤال ۹: (۱/۲۵) نمره



(۰/۲۵) نمره

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۹)

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ۶ است دایره ای به مرکز A و شعاع ۶ است و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۵ هستند دو خط Δ و Δ' موازی با d است. با توجه به شکل فقط یکی از دو خط موازی (Δ) دایره را در دو نقطه قطع می کند. پس مسئله دو جواب دارد. (۱ نمره)

## پاسخ سؤال ۱۰: (۱/۵) نمره

اگر O(α, β) مرکز دایره باشد آنگاه O(α, 2α-1) است. بنابراین:

(۰/۲۵) نمره

$$R = OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2 + (2\alpha-3)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (2\alpha-1)^2} \quad (\text{نمره ۰/۲۵})$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow O(0, -1) \quad (\text{نمره ۰/۲۵})$$

$$R = OA = \sqrt{1^2} = 1 \quad (\text{نمره ۰/۲۵})$$

$$\text{معادله دایره: } (x-0)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{1^2})^2 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 1 \quad (\text{نمره ۰/۵})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۶)

## پاسخ سؤال ۱۱ (۱/۲۵) نمره

از تلاقی دو قطر دایره، مرکز دایره به دست می آید.

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \rightarrow x=2 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow O(2, -1) \quad (\text{نمره ۰/۵})$$

فاصله مرکز دایره تا خط مماس برابر با طول شعاع دایره است.

$$R = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2 \quad (\text{نمره ۰/۲۵})$$

$$\text{معادله دایره: } (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2^2 = 4 \quad (\text{نمره ۰/۵})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۶)

## پاسخ سؤال ۱۲: (۱/۷۵) نمره

مثلث ABC قائم الزاویه است.

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{1+1}{1+1} = 1 \quad (\text{نمره ۰/۲۵}) \\ m_{AC} &= \frac{-3+1}{1+1} = -1 \quad (\text{نمره ۰/۲۵}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \quad (\text{نمره ۰/۲۵})$$

بنابراین BC، قطر دایره محیطی مثلث است.

$$(O = \frac{B+C}{2} = (1, -1), R = \frac{BC}{2} = 2)$$



شیب خط مماس بر دایره در نقطه B، عکس و قرینه شیب خط گذرنده از B و C است.

$$m_{BC} = \frac{1 - (-2)}{1 - 1} \text{ (نمره } \frac{0}{25} \text{)}$$

بنابراین شیب خط مماس بر دایره در نقطه B برابر صفر است. (نمره  $\frac{0}{25}$ ) پس معادله خط مماس عبارت است از:

$$y - 1 = 0(x - 1) \Rightarrow y = 1 \text{ (نمره } \frac{0}{25} \text{)}$$

(نمره  $\frac{0}{25}$ )

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۶)

### پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۵ نمره)

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow O(1, -2) \text{ (نمره } \frac{0}{25} \text{)} \quad R = \frac{\sqrt{4 + 16 - 4(-5)}}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{40}}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10} \text{ (نمره } \frac{0}{25} \text{)}$$

چون نقطه  $A(-2, m)$  درون دایره است، پس:  $OA < R$  (نمره  $\frac{0}{25}$ )

$$OA = \sqrt{(1+2)^2 + (m+2)^2} < \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{9 + (m+2)^2} < \sqrt{10} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \left. \begin{aligned} & \Rightarrow 9 + (m+2)^2 < 10 \Rightarrow (m+2)^2 < 1 \Rightarrow |m+2| < 1 \\ & \Rightarrow -1 < m+2 < 1 \xrightarrow{-2} \Rightarrow -3 < m < -1 \end{aligned} \right\} \text{ (نمره } \frac{0}{5} \text{)}$$

$$\Rightarrow -1 < m+2 < 1 \xrightarrow{-2} \Rightarrow -3 < m < -1 \text{ (نمره } \frac{0}{25} \text{)}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۶)

### پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۷۵ نمره)

$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(-2, 0) \text{ (نمره } \frac{0}{25} \text{)} \\ R = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 0 + 0} = 2 \text{ (نمره } \frac{0}{25} \text{)} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} O'(1, -4) \text{ (نمره } \frac{0}{25} \text{)} \\ R' = \sqrt{17 - m} \text{ (نمره } \frac{0}{25} \text{)} \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{(-2-1)^2 + (0+4)^2} = 5 \text{ (نمره } \frac{0}{25} \text{)}$$

$$OO' = R + R' \Rightarrow 5 = 2 + \sqrt{17 - m} \Rightarrow m = 8 \text{ (نمره } \frac{0}{25} \text{)}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۳)



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(د) نادرست،  $(|A| = \frac{\Delta}{\gamma} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{\gamma}{\Delta})$

(ج) نادرست

(ب) درست

(الف) نادرست

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۹، ۲۱، ۲۳ و ۳۰)

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(د) -۲۷

(ج) -۳۶

(ب) ۶۰

(الف) -۱

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۳، ۱۷، ۱۹ و ۲۸)

پاسخ سؤال ۳: (۱ نمره)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{bmatrix}$$

$$2A^2 - \Delta I = \begin{bmatrix} -18 & 44 \\ -22 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & 44 \\ -22 & 21 \end{bmatrix}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۸)

پاسخ سؤال ۴: (۱ نمره)

اثبات: فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون ماتریس A باشند، ثابت می‌کنیم B = C است. (۲۵/۰ نمره)

AB = BA = I (نمره ۲۵/۰) : طبق فرض

AC = CA = I (نمره ۲۵/۰) : طبق فرض

B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C (نمره ۲۵/۰)

پس وارون A منحصر به فرد است.

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)

پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)

طرفین تساوی را در وارون ماتریس  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  یعنی  $\frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  از سمت راست ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow a=1, b=1, c=7, d=9$$

بنابراین:

a + b + c + d = 18 (نمره ۲۵/۰)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)

پاسخ سؤال ۶: (۱/۵ نمره)

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases} \quad X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

|A| = 6 + 20 = 26 (نمره ۲۵/۰)

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 52 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x = 2, y = 1 (نمره ۲۵/۰)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۱)

پاسخ سؤال ۷: (۱/۲۵ نمره)

ابتدا ماتریس‌های A و B را به دست می‌آوریم.

$$A = [2i - j]_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}_{3 \times 1}, \quad B = [ij + 1]_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9+20 \\ 2+9+20 \\ 2+9+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 31 \\ 31 \end{bmatrix} \Rightarrow |BA| = 31$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۸)



پاسخ سؤال ۸: (۱/۷۵ نمره)

از طرفین تساوی داده شده دترمینان می گیریم.

$$A = \begin{bmatrix} 2|A| & 1 & 0 \\ 1 & -1 & |A| \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{bmatrix} 2|A| & 1 & 0 \\ 1 & -1 & |A| \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2|A|(-2) - 1(2+|A|) \quad (نمره ۰/۵)$$

(نمره ۰/۲۵)

$$\Rightarrow |A| = -4|A| - 2 - |A| \Rightarrow 6|A| = -2 \Rightarrow |A| = -\frac{1}{3} \quad (نمره ۰/۲۵)$$

ماتریس اسکالر B از مرتبه ۳ است. اگر هر یک از درایه های روی قطر X باشد، داریم:

$$3x = |A| \Rightarrow 3x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{9} \quad (نمره ۰/۲۵)$$

بنابراین:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \left(-\frac{1}{9}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)\left(-\frac{1}{9}\right) = \left(-\frac{1}{9}\right)^3 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$|-3B| = (-3)^3 |B| = (-27)\left(-\frac{1}{9}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{27} \quad (نمره ۰/۲۵)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۰)

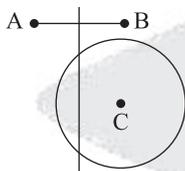
پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

بستگی دارد که عمودمنصف AB با دایره ای به مرکز C چند نقطه تقاطع داشته باشند که جواب مسئله صفر یا ۱ یا ۲ نقطه خواهد بود.

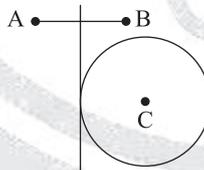
(نمره ۰/۲۵)

(نمره ۰/۲۵)

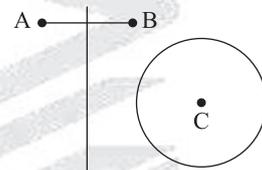
(نمره ۰/۲۵)



عمودمنصف  
(نمره ۰/۲۵)



(نمره ۰/۲۵)



(نمره ۰/۲۵)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۹)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱/۲۵ نمره)

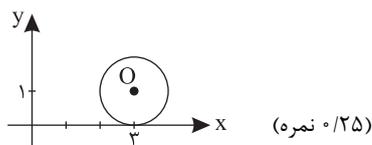
الف) طرفین رابطه را بر ۳- تقسیم می کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x - y + \frac{5}{3} = 0$$

$$a^2 + b^2 - 4c = 4 + 1 - \frac{2}{3} < 0 \Rightarrow \text{دایره نیست.} \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$a^2 + b^2 - 4c = 36 + 4 - 36 = 4 > 0 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

$$\text{مرکز دایره } O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right), \quad R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{36 + 4 - 36}}{2} = 1 \quad (نمره ۰/۲۵)$$



(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۲)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۲۵ نمره)

مرکز دایره روی خط  $2x - y = 0$  قرار دارد، پس  $O(\alpha, 2\alpha)$  است. (نمره ۰/۲۵) در ضمن دایره بر محور لایها در ناحیه اول مماس است، پس طول

مرکز برابر R است. (نمره ۰/۲۵) بنابراین مرکز  $O(R, 2R)$  است، پس  $O(3, 6)$  است. (نمره ۰/۲۵)

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 9 \quad (نمره ۰/۲۵)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۶)



## پاسخ سؤال ۱۲: (۱/۵ نمره)

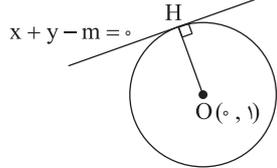
چون دایره از نقطه A می‌گذرد، پس مختصات نقطه A در معادله صدق می‌کند.

$$x^2 + y^2 - 2y + n = 0 \xrightarrow{A(1,2)} 1 + 4 - 2(2) + n = 0 \Rightarrow n = -1 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

پس معادله دایره عبارت است از:

مرکز دایره:  $O(0, 1)$  (نمره ۰/۲۵)

$$R = \frac{\sqrt{0^2 + 4 - 4(-1)}}{2} = \sqrt{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

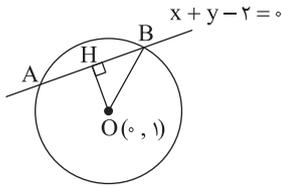
از طرفی خط  $x + y - m = 0$  بر دایره مماس است، پس فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است.

$$R = OH = \frac{|0 + 1 - m|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |1 - m| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 - m = 2 \Rightarrow m = -1 \quad (\text{نمره } 0/25) \\ 1 - m = -2 \Rightarrow m = 3 \quad (\text{نمره } 0/25) \end{cases}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴۵)

## پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۵ نمره)

می‌دانیم از مرکز دایره به وتر عمود کنیم؛ وتر را نصف می‌کند. پس:



$$AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow AH = HB = \sqrt{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$OH = \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

در مثلث  $\triangle OHB$  ( $H = 90^\circ$ ) فیثاغورس می‌نویسیم.

$$OB^2 = R^2 = OH^2 + HB^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\text{معادله دایره: } (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{2} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴۳)

## پاسخ سؤال ۱۴: (۱/۵ نمره)

مثلث ABC قائم‌الزاویه است، زیرا:

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{-3} \\ m_{AC} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \quad (\text{نمره } 0/25)$$

پس قطر دایره محیطی مثلث ضلع BC است.

$$O = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), R = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2} \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\text{معادله دایره: } \left(x - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{26}{4} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$OM = \sqrt{\left(\frac{x}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{y}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

چون  $OM > R$  است، پس M خارج دایره قرار دارد. (نمره ۰/۲۵)راه حل دوم: فرض کنیم معادله دایره  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  باشد، نقاط A و B و C را در معادله قرار می‌دهیم با حل دستگاه مقادیر a، b و c به دست می‌آید.

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴۶)

## پاسخ سؤال ۱۵: (۱/۵ نمره)

$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

$$O'(0, 3), R' = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 36 - 0} = 3 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$O(-1, 2), OO' = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$OO' = |R - R'| \Rightarrow \sqrt{2} = |R - 3| \Rightarrow \begin{cases} R - 3 = \sqrt{2} \Rightarrow R = 3 + \sqrt{2} \quad (\text{نمره } 0/25) \\ R - 3 = -\sqrt{2} \Rightarrow R = 3 - \sqrt{2} \quad (\text{نمره } 0/25) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = (3 + \sqrt{2})^2 \quad (\text{نمره } 0/25) \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = (3 - \sqrt{2})^2 \quad (\text{نمره } 0/25) \end{cases}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴۴)



## پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) درست

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 3 \\ -4 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 3 \\ -4 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$(2A - I)^T = 2A^T + I - 2A = I - 2A$$

ب) نادرست، ماتریس C از مرتبه ۲×۳ است. پس  $D = [d_{ij}]_{a \times b}$  از مرتبه ۲×۳ است. پس  $a = 2$  و  $b = 3$  داریم:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -\frac{9}{2} \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -\frac{9}{2} \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

پس کوچکترین درایه ماتریس D برابر  $-\frac{9}{2}$  است نه -۲.

ج) نادرست

د) درست

$$A \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2I \Rightarrow |A| \begin{vmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = |2I| \Rightarrow |A| \times 4 = 8 \Rightarrow |A| = 2$$

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۳، ۱۹، ۲۱ و ۳۰)

## پاسخ سؤال ۲: (۱ نمره)

ماتریس  $(A - B)^T$  را به دست می‌آوریم:

$$(A - B)^T = (A - B)(A - B) = A^T - AB - BA + B^T \quad (1) \quad (5/0 \text{ نمره})$$

از طرف دیگر بنا بر فرض:

$$(A - B)^T = A^T - 2AB + B^T \quad (2)$$

$$(2) \text{ و } (1) \Rightarrow A^T - AB - BA + B^T = A^T - 2AB + B^T \Rightarrow -AB - BA = -2AB \Rightarrow AB = BA \quad (5/0 \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۱)

## پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)

در عبارت خواسته شده از ماتریس A از چپ و از ماتریس B از راست فاکتور می‌گیریم. داریم: (۲۵/۰ نمره)

$$A \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} B - \frac{2}{3} A \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} B = A \left( \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \right) B = A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} B = A (2I) B = 2AB = 2 \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (25/0 \text{ نمره})$$

(۷۵/۰ نمره)

پس مجموع درایه‌های قطر فرعی این ماتریس مساوی  $12 = 4 + 8$  است. (۲۵/۰ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۹)

## پاسخ سؤال ۴: (۱/۵ نمره)

ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را پیدا می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

(۵/۰ نمره)

(۵/۰ نمره)

بنابراین:

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$BA - I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \quad (5/0 \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۱)



## پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

ماتریس ضرایب این دستگاه  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  است. پس  $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  (۲۵/۰ نمره). بنابراین:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (۵/۰ نمره)$$

پس  $x = \frac{2}{3}$  و  $y = -\frac{1}{3}$  (۲۵/۰ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۵)

## پاسخ سؤال ۶: (۱/۵ نمره)

ماتریس  $A$  وارون پذیر نیست. پس  $|A| = 0$ .

$$|A| = m + 3 - 2m = 0 \Rightarrow m = 3 \quad (۵/۰ نمره)$$

بنابراین:

$$B = \begin{bmatrix} 2m+1 & 1-m \\ m & m+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \quad (۵/۰ نمره)$$

(۲۵/۰ نمره)

پس مجموع درایه‌های ماتریس  $B^{-1} = \frac{1}{34}(4+2-3+7) = \frac{10}{34}$  برابر  $\frac{5}{17}$  است. (۲۵/۰ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)

## پاسخ سؤال ۷: (۱ نمره)

$$\begin{cases} mx + (m-3)y = 2m+1 \\ (m+6)x - (m+2)y = 5m+1 \end{cases}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad (۲۵/۰ نمره) \quad \text{شرط بی‌شمار جواب}$$

$$\frac{m}{m+6} = \frac{m-3}{-m-2} \Rightarrow m^2 + 3m - 18 = -m^2 - 2m \Rightarrow 2m^2 + 5m - 18 = 0 \quad (۵/۰ نمره)$$

$$m = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{4} = \frac{-5 \pm 13}{4} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \checkmark \\ m = -\frac{9}{2} \times \end{cases} \quad (۲۵/۰ نمره)$$

دیده می‌شود  $m = 2$  در شرط بی‌شمار جواب صدق می‌کند ولی  $m = -\frac{9}{2}$  صدق نمی‌کند.

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۱)

## پاسخ سؤال ۸: (۱/۵ نمره)

$$2A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & |A| \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} |2A^{-1}| = 3 + |A| \quad (۵/۰ نمره) \Rightarrow 4|A^{-1}| = 3 + |A| \quad (۲۵/۰ نمره)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{|A|} = 3 + |A| \xrightarrow{\times |A|} 4 = 3|A| + |A|^2 \Rightarrow |A|^2 + 3|A| - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \\ |A| = -4 \end{cases} \quad (۵/۰ نمره)$$

(۲۵/۰ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۱)

## پاسخ سؤال ۹: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف)  $\frac{25}{16}\pi$

$$(a+1) = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + x + 4y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y - \frac{1}{2} = 0$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + 2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{مساحت دایره} = \frac{25}{16}\pi$$

ب) دو خط متقاطع

ج)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$O(-1, 1) \Rightarrow OA = 1, R = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{طول مماس} = \sqrt{OA^2 - R^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

د) ۴ شعاع چنین دایره‌هایی  $R + R' = 4$  یعنی  $1 + 3 = 4$  است.

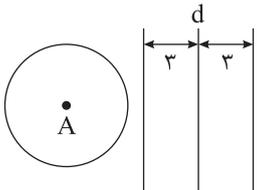
(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۳۹، ۴۱ و ۴۳)



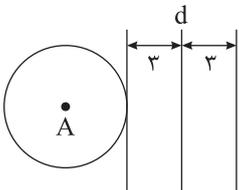
## پاسخ سؤال ۱۰: (۲ نمره)

مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ هستند، دایره به مرکز A و شعاع ۲ است (۵/۵ نمره) و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ هستند دو خط موازی با d در طرفین آن است. (۵/۵ نمره) برخورد این دو مکان هندسی نقاط مورد نظر این سؤال است.

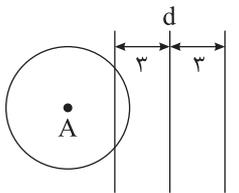
۱- در صورتی که دو خط موازی d دایره به مرکز A را قطع نکنند، مسئله جواب ندارد. (۲۵/۵ نمره) (فاصله A تا d بیشتر از ۵ باشد.)



۲- اگر یکی از دو خط موازی بر دایره مماس باشد، مسئله یک جواب دارد. (۲۵/۵ نمره) (فاصله A تا d برابر ۵ باشد.)



۳- اگر یکی از دو خط موازی دایره را قطع کند، مسئله دو جواب دارد. (۲۵/۵ نمره) (فاصله A تا d کمتر از ۵ باشد.)



۴- چون فاصله دو خط موازی برابر ۶ است و بیشترین فاصله نقاط دایره برابر قطر آن یعنی ۴ است پس حالتی که دایره هر دو خط موازی را قطع کنند، یا بر یکی مماس و دیگری را قطع کند ایجاد نمی شود. پس این مسئله حداکثر ۲ جواب دارد. (۲۵/۵ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۹)

## پاسخ سؤال ۱۱: (۱ نمره)

معادله ضمنی دایره را به صورت استاندارد می نویسیم:

$$(x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \quad (۲۵/۵ \text{ نمره})$$

پس شعاع این دایره برابر  $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$  است. (۲۵/۵ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۱)

## پاسخ سؤال ۱۲: (۵/۱ نمره)

ابتدا شعاع و مرکز هر دو دایره را پیدا می کنیم:

$$x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (5, 7) \\ R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{100 + 196 - 292}}{2} = 1 \end{cases} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O' = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2, 3) \\ R' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 36 + 12}}{2} = 4 \end{cases} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

اکنون طول خط المرکزین OO' را با جمع و تفریق شعاعها مقایسه می کنیم:

$$OO' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow OO' = R + R' \quad (۲۵/۵ \text{ نمره})$$

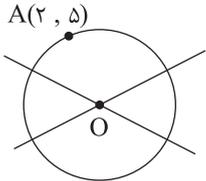
بنابراین دو دایره مماس خارجی هستند. پس سه مماس مشترک دارند. (۲۵/۵ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۴)



پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۵ نمره)

نقطه تلاقی دو قطر مرکز دایره است.



$$\begin{cases} y + 2x = 5 \\ y - x = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم}} 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow O(2, 1) \quad (\text{نمره } 0/25)$$

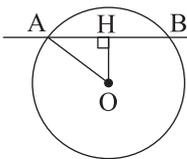
$$R = OA = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴۶)

پاسخ سؤال ۱۴: (۲ نمره)

با توجه به شکل  $AH = \frac{AB}{2} = \sqrt{5}$  است.



$$3y - 4x + 6 = 0 \Rightarrow \text{فاصله } O \text{ تا خط } OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|0 + 4 + 6|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{10}{5} = 2 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$\Delta OAH: OA^2 = AH^2 + OH^2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow R = 3 \quad (\text{نمره } 0/5)$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 9 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

اکنون نقاط برخورد دایره با محور xها را پیدا می‌کنیم:

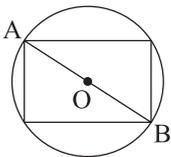
$$y = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 9 \quad (\text{نمره } 0/25) \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow M(2, 0) \quad (\text{نمره } 0/25) \\ x+1 = -3 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow N(-4, 0) \quad (\text{نمره } 0/25) \end{cases}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴۳)

پاسخ سؤال ۱۵: (۱ نمره)

در صورتی که نقاط  $A(2, 3)$  و  $B(0, 1)$  دو رأس مقابل یک مستطیل باشند، آنگاه AB قطر دایره محیطی این مستطیل خواهد بود.

پس O مرکز دایره محیطی وسط AB و شعاع آن  $\frac{AB}{2}$  است. (نمره ۰/۲۵)



$$O = \frac{A+B}{2} = (1, 2), \quad R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4+4}}{2} = \sqrt{2} \quad (\text{نمره } 0/25)$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2 \quad (\text{نمره } 0/25)$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴۶)

سبب گروه	گروه طراحی و بازنگاری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران (به ترتیب حروف الفبا)
حسن محمدبیگی	احمدرضا فلاح - حسن محمدبیگی - محمدتقی نمازی	مهديار شريف - فاطمه فرجی

واحد فنی (به ترتیب حروف الفبا)
زهرا احدی - امیرعلی الماسی - مبینا بهرامی - معین‌الدین تقی‌زاده - پریا رحیمی - مهرداد شمسی - راضیه صالحی - انسیه مرزبان



پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

(الف) نادرست

(ب) درست

(ج) نادرست

(د) درست

(هندسه دوازدهم، صفحه های ۲۱ و ۲۳)

پاسخ سؤال ۲: (۱ نمره)

$$A \times B = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 3 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+12 & -2a+8 \\ 3+3b & -6+2b \end{bmatrix} \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

$$-2a+8=0 \Rightarrow a=4, \quad 3+3b=0 \Rightarrow b=-1 \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۲)

پاسخ سؤال ۳: (۱ نمره)

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = I \times C = C$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)

پاسخ سؤال ۴: (۱/۵ نمره)

چون  $A$  وارون پذیر نیست، پس  $|A|=0$  (۲۵/۰ نمره)

$$|A|=0 \Rightarrow 2(2-m) + 5(m+1) = 0 \Rightarrow 4-2m+5m+5=0 \Rightarrow 3m+9=0 \Rightarrow m=-3 \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A + 3I = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

$$(A+3I)^{-1} = \frac{1}{40-10} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۳)

پاسخ سؤال ۵: (۱ نمره)

حاصل دترمینان را بر حسب ستون اول به دست می آوریم:

$$|A| = 1(-2) + 0 + 0 = -2 \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} A^4 \right| = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 |A|^4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-2)^4 = 2 \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۷)

پاسخ سؤال ۶: (۲ نمره)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

$$A^{100} = (A^2)^{50} = (I)^{50} = I \quad (۵/۰ \text{ نمره}), \quad A^{101} = (A^2)^{50} \times A = I \times A = A \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

$$A^{100} - A^{101} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه ها} = -1+2=1 \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۰)

پاسخ سؤال ۷: (۲ نمره)

$$\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = m \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

می دانیم در حل دستگاه به کمک ماتریس وارون  $X = A^{-1}B$  (۲۵/۰ نمره) بنابراین:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5m \\ -4-3m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 5m \\ y = -4-3m \end{cases} \quad (۵/۰ \text{ نمره})$$

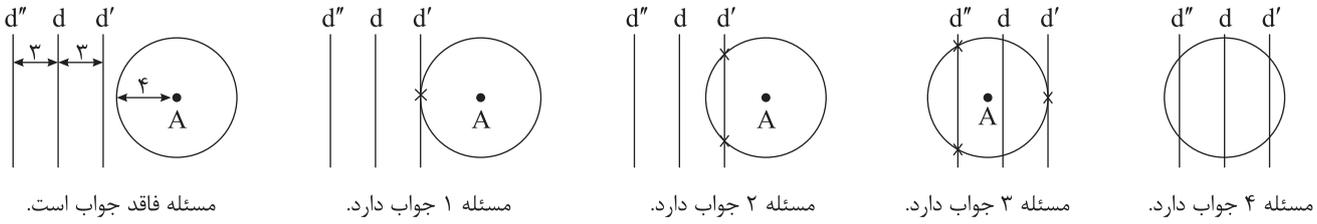
$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} y = -1 \Rightarrow -4-3m = -1 \Rightarrow 3m = -3 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow x = 5m = -5 \quad (۲۵/۰ \text{ نمره})$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۲۴)



پاسخ سؤال ۸: (۱/۵ نمره)

مکان هندسی نقاطی که از خط  $d$  به فاصله ۳ واحد باشند، خطوط  $d'$  و  $d''$  موازی با  $d$  (نمره ۰/۲۵) در دو سوی آن به فاصله ۳ واحد تا خط  $d$  می باشند و مکان هندسی نقاطی که از نقطه  $A$  به فاصله ۴ واحد باشند، دایره ای است (نمره ۰/۲۵) به نام  $C$  به مرکز  $A$  و شعاع ۴ واحد، تعداد نقاط برخورد خطوط  $d'$  و  $d''$  با دایره  $C$  جواب مسئله است. (نمره ۰/۲۵)



مسئله فاقد جواب است.      مسئله ۱ جواب دارد.      مسئله ۲ جواب دارد.      مسئله ۳ جواب دارد.      مسئله ۴ جواب دارد. (۰/۷۵ نمره)

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۶)

پاسخ سؤال ۹: (۱/۵ نمره)

$$O \begin{cases} -1 \\ -\frac{a}{2} \end{cases} \text{ (نمره ۰/۵)}$$

$$y = 2x + 1 \Rightarrow -\frac{a}{2} = -2 + 1 \Rightarrow -\frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2 \text{ (نمره ۰/۵)}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 12} = \frac{1}{2} \sqrt{20} = \sqrt{5} \text{ (نمره ۰/۵)}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۴۱)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱ نمره)

ابتدا محل برخورد خط  $d$  را با محورهای مختصات می یابیم:

$$x = 0 \Rightarrow -2y = 6 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow A \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow B \begin{cases} 3 \\ 0 \end{cases} \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

نقاط  $A$  و  $B$  دو سر قطر دایره اند.

$$O = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{3}{2}, -1\right) \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

$$AB = \sqrt{(0-3)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ (نمره ۰/۲۵)} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{18}}{2} \Rightarrow C(x, y) : (x - \frac{3}{2})^2 + (y + 1)^2 = \frac{18}{4} \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۶)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۵ نمره)

نقطه تلاقی دو خط مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} 3y = 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow O(2, 1) \text{ (نمره ۰/۵)}$$

از طرف دیگر فاصله مرکز  $O$  تا خط  $y = x$  نیمساز ناحیه اول برابر شعاع دایره است. (نمره ۰/۲۵)

$$R = OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (نمره ۰/۵)}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{2} \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

بنابراین:

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۶)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱/۵ نمره)

$$O \begin{cases} 3 \\ 7 \end{cases} \quad A \begin{cases} -1 \\ 6 \end{cases} \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

$$m_{OA} = \frac{y-6}{x+1} = \frac{1}{4} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = -4 \text{ (نمره ۰/۵)}$$

$$y = -4x + b \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

$$A(-1, 6) \Rightarrow 6 = 4 + b \Rightarrow b = 2 \text{ (نمره ۰/۲۵)} \Rightarrow y = -4x + 2 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۳۵)

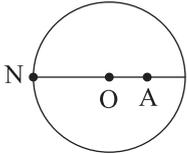


## پاسخ سؤال ۱۳: (۱ نمره)

ابتدا وضعیت نقطه را نسبت به دایره بررسی می‌نماییم:

$$O \begin{cases} -\frac{a}{2} = 2 \\ -\frac{b}{2} = -4 \end{cases}, R = \sqrt{4+16+16} = 6 \text{ (نمره } \frac{1}{25} \text{)}$$

فاصله مرکز دایره را تا نقطه A یافته با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.



$$OA = \sqrt{(2+2)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (نمره } \frac{1}{25} \text{)}$$

چون فاصله مرکز دایره تا نقطه A کمتر از شعاع دایره می‌باشد، پس A درون دایره است. (نمره  $\frac{1}{25}$ )

بیشترین فاصله نقطه A تا محیط دایره اندازه AN می‌باشد:

$$AN = OA + R = 5 + 6 = 11 \text{ (نمره } \frac{1}{25} \text{)}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴۶)

پاسخ سؤال ۱۴: (هر مورد  $\frac{1}{25}$  نمره)

(د) درون

(ج) ۷

(ب) عمود

(الف) عمود

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۳۵، ۳۸ و ۴۶)

## پاسخ سؤال ۱۵: (۱/۵ نمره)

شرط آنکه دو دایره مماس داخل باشند آن است که  $OO' = |R - R'|$  (نمره  $\frac{1}{25}$ ) پس:

$$C: x^2 + y^2 + 2x + 4y + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} O \begin{cases} -\frac{a}{2} = -1 \\ -\frac{b}{2} = -2 \end{cases} \\ R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4m} = \sqrt{5 - m} \end{cases} \text{ (نمره } \frac{1}{25} \text{)}$$

$$C': x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O' \begin{cases} -\frac{a}{2} = 3 \\ -\frac{b}{2} = 1 \end{cases} \\ R' = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4 - 36} = 1 \end{cases} \text{ (نمره } \frac{1}{25} \text{)}$$

$$OO' = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5 \text{ (نمره } \frac{1}{25} \text{)}$$

$$OO' = |R - R'| \Rightarrow 5 = |\sqrt{5-m} - 1| \Rightarrow \begin{cases} 5 = \sqrt{5-m} - 1 \Rightarrow 6 = \sqrt{5-m} \Rightarrow 36 = 5 - m \Rightarrow m = -31 \\ -5 = \sqrt{5-m} - 1 \Rightarrow \sqrt{5-m} = -4 \text{ غلطی} \end{cases} \text{ (نمره } \frac{1}{5} \text{)}$$

(هندسه دوازدهم، صفحه ۱۴۴)

سنگروه	گروه طراحی و بازنگاری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران (به ترتیب حروف الفبا)
حسن محمدبیگی	احمدرضا فلاح - حسن محمدبیگی - محمدتقی نمازی	مهرداد شریف - فاطمه فرجی

واحد فنی (به ترتیب حروف الفبا)

زهرا احدی - امیرعلی الماسی - مبینا بهرامی - معین‌الدین تقی‌زاده - پریا رحیمی - مهرداد شمسی - راضیه صالحی - انسیه مرزبان